शासकीय डॉ. श्यामा प्रसाद मुखर्जी विज्ञान एवं वाणिज्य महाविद्यालय, कोलार रोड, भोपाल म.प्र.

प्रश्न बैंक

गणित

संपादन एवं सहभागिता
डॉ. राजेश श्रीवास्तव
डॉ. नवल सिंह
डॉ. अनीता मंडलोई
डॉ. एस.के.मल्होत्रा
डॉ. ज्योति पंथी

विषय विशेषज्ञ
डॉ. सभाकांत द्विवेदी
डॉ. वंदना जाट
डॉ. शालू सक्सेना
डॉ. वर्षा मंडवारिया

तकनीकी सहायक
श्री कपिल कुमार तिवारी

Tele. No. 07552551837 | Website : www.gscbhopal.in | E-mail : hegbsccbho@mp.gov.in

शासकीय डॉ. श्यामा प्रसाद मुखर्जी विज्ञान एवं वाणिज्य
महाविद्यालय, कोलार रोड, भोपाल म.प्र.

प्रश्न बैंक

गणित

बी.एससी.

प्रथम एवं द्वितीय वर्ष

(राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 पर आधरित)

- अति लघु उत्तरीय प्रश्न एवं उत्तर
- लघु उत्तरीय प्रश्न
- दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

परीक्षा प्रकोष्ठ
आयोजक एवं प्रकाशक

(डॉ. सुधा बैसा)
प्राचार्य

Tele. No. 07552551837 | Website : www.gscbhopal.in | E-mail : hegbsccbho@mp.gov.in

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Multiple Choice Questions

Q-01: The equation $\frac{l}{r} = 1 + e\,cos\theta$ represents a hyperbola if:

समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e\,cos\theta$ एक अतिपरवलय को निरूपित करता है–

(A) $e = 1$ (B) $0 < e < 1$ (C) $e > 1$ (D) $e = -1$

Q-02: An ellipse has

एक दीर्घवृत्त के

(A) no asymptotes कोई अनन्तस्पर्शियाँ नहीं

(B) one asymptote एक अनन्तस्पर्शी

(C) two asymptotes दो अनन्तस्पर्शियाँ

(D) many asymptotes कई अनन्तस्पर्शियाँ

Q-03: Equation $\frac{l}{r} = 2\,sin^2\frac{\theta}{2}$ represents:

समीकरण $\frac{l}{r} = 2\,sin^2\frac{\theta}{2}$ निरूपित करता है:

(A) ellipse दीर्घवृत्त (B) Hyperbola अतिपरवलय

(C) Parabola परवलय (D) a line एक रेखा

Q-04: For the conic $\frac{l}{r} = 1 + e cos\theta$ equation of directrix is-

शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e cos\theta$ की नियता का समीकरण है–

(A) $\frac{l}{r} = 1 - e cos\,\theta$ (B) $\frac{l}{r} = e cos\,\theta$

(C) $\frac{l}{r} = 1 - e^2 cos\,\theta$ (D) None of these

Q-05: Equation of right circular cone with vertex origin and axis-x, $\boldsymbol{\alpha = 45^o}$(semi-vertical angle) is

लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिंदु, अक्ष$-\boldsymbol{x}$ए $\boldsymbol{\alpha = 45^o}$ (अर्धशीर्ष कोण) है

(A) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}$ (B) $\boldsymbol{y^2 + z^2 = x^2}$

(C) $\boldsymbol{x^2 + z^2 = y^2}$ (D) $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 0}$

Q-06: Guiding curve of a right circular cylinder is-

लम्बवृत्तीय बेलन का निर्देशक वक्र है–

(A) ellipse दीर्घवृत्त (B) any closed curve कोई बंद वक्र

(C) circle वृत्त (D) pair of straight lines सरल रेखा का जोड़ा

Q-07: The equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents an ellipse if-

समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ दीर्घवृत्त निरूपित करता है यदि–

(A) $h < ab$ (B) $h > ab$ (C) $h^2 > ab$ (D) $h^2 < ab$

Q-08: The centre of conic $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ is-

शांकव $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ का केन्द्र है–

(A) $(1,-1)$ (B) $(1,1)$ (C) $(-1,1)$ (D) $(1,-1)$

Q-09: The equation of the cone whose vertex is the origin and direction cosines of its generator satisfy the relation $4\boldsymbol{l}^2 + 7\boldsymbol{m}^2 - 8\boldsymbol{n}^2 = 0$ is-

उसक शंकु का समीकरण, जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है तथा उसकी जनकों की दिक् कोज्यायें संबंध $4\boldsymbol{l}^2 + 7\boldsymbol{m}^2 - 8\boldsymbol{n}^2 = 0$ए को सन्तुष्ट करती है, होगा–

(A) $4x + 7y - 8z = 0$ (B) $4yz + 7zx - 8xy = 0$

(C) $4x^2 + 7y^2 - 8z^2 = 0$ (D) $16yz + 49zx - 64xy = 0$

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Q-10: The equation of a right circular cone whose vertex is origin, axis is X-axis and semi vertical angle is 45°, is-

उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण, जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है अक्ष x-अक्ष है और शीर्ष 45 है, होगा–

(A) $x^2 + y^2 = z^2$ (B) $y^2 + z^2 = x^2$

(C) $x^2 + z^2 = y^2$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Q-11: The condition that the plane $ux + vy + wz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$, in perpendicular generator is-

प्रतिबन्ध कि समतल $ux + vy + wz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$, को लम्ब जनको में काटे, यह है–

(A) $u + v + w = 0$ (B) $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0$

(C) $u^2 + v^2 + w^2 = 0$ (D) None of these buesa ls dksbZ ugha

Q-12: A homogeneous equation of second degree always represent:

द्वितीय कोटि का समघाती समीकरण सदैव व्यक्त करता है–

(A) A pair of straight line सरल रेखाओं का युग्म (B) A circle एक वृत

(C) A sphere एक गोला (D) A cone एक शंकु

Q-13: If the cone $\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0}$ has three mutually perpendicular generators then:

यदि शंकु $\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0}$ के तीन परस्पर लंबवत् जनक हो तो–

(A) $\boldsymbol{a + b + c = 0}$ (B) $\boldsymbol{a + 2b + 3c = 0}$

(C) $\boldsymbol{a + b = c}$ (D) $\boldsymbol{a = b + c}$

Q-14: The equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents an ellipse if-

समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ दीर्घवृत को निरूपित करता है यदि–

(A) $h < ab$ (B) $h > ab$ (C) $h^2 > ab$ (D) $h^2 < ab$

Q-15: The general equation of cone passing through co-ordinate axes is-

निर्देशांक्षो से होकर जाने वाले शंकु का व्यापक समीकरण है–

(A) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ (B) $fyz + gzx + hxy = 0$

(C) $ax^2 + by^2 + cz^2 = k, \quad (k \neq 0)$ (D) $fyz + gzx = 0$

Q-16: The semi vertical angle of a right circular cone passing through co-ordinate axes is-

अक्षो से जाने वाले लम्ब वृत्ताकार शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण है–

(A) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\tan^{-1}\sqrt{2}$ (C) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

Q-17: The radius of the base of the cone $x^2 + y^2 = z^2, \ z = 1$ is-

शंकु $x^2 + y^2 = z^2, \ z = 1$ के आधार की त्रिज्या है–

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 0

Q-18: The equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents an ellipse if-

समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ दीर्घवृत को निरूपित करता है यदि–

(A) $h < ab$ (B) $h > ab$ (C) $h^2 > ab$ (D) $h^2 < ab$

Q-19: The general equation of cone passing through co-ordinate axes is-

निर्देशांक्षो से होकर जाने वाले शंकु का व्यापक समीकरण है–

(A) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ (B) $fyz + gzx + hxy = 0$

(C) $ax^2 + by^2 + cz^2 = k, \quad (k \neq 0)$ (D) $fyz + gzx = 0$

Q-20: The semi vertical angle of a right circular cone passing through co-ordinate axes is-

अक्षो से जाने वाले लम्ब वृत्ताकार शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण है–

(A) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\tan^{-1}\sqrt{2}$ (C) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

Q-21: The radius of the base of the cone $x^2 + y^2 = z^2, \; z = 1$ is-

शंकु $x^2 + y^2 = z^2, \; z = 1$ के आधार की त्रिज्या है–

(A) $-\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) 1 (D) 0

Q-22: The equation $\boldsymbol{ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ represents a hyperbola if-

समीकरण $\boldsymbol{ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ अतिपरवलय को निरूपित करता है यदि–

(A) $\boldsymbol{h^2} > ab, \; \Delta \neq 0$ (B) $\boldsymbol{h^2} > ab, \; \Delta = 0$

(C) $\boldsymbol{h^2 = ab}, \; \Delta \neq \boldsymbol{0}$ (D) $\boldsymbol{h^2 = ab}, \; \Delta = \boldsymbol{0}$

Q-23: The equation $\boldsymbol{\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta}$ represents an ellipse if -

समीकरण $\boldsymbol{\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta}$ एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है यदि–

(A) $\boldsymbol{e = 1}$ (B) $\boldsymbol{0} < e < 1$ (C) $\boldsymbol{e} > 1$ (D) None of these

Q-24: Eccentricity of a rectangular hyperbola is -

लम्ब कोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होती है–

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{1}$

Q-25: Equation of directrix for the $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ is -

शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ की नियता का समीकरण है–

(A) $\frac{l}{r} = e\cos\theta$ (B) $\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta$

(C) $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ (D) $\frac{l}{r} = 1 - \cos\theta$

Q-26: $2yz + 3zx + 4xy = 0$ represents-

$2yz + 3zx + 4xy = 0$ द्वारा निरूपित ज्यामितीय आकृति–

(A) a sphere ,d xksyk

(B) a cone ,d 'kadq

(C) cone passing through co-ordinate axis v{kksa ls tkus okys 'kadq dks

(D) a cylinder ,d csyu

Q-27: Equation of reciprocal cone for the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ is

शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के व्युत्क्रम शंकु का समीकरण –

(A) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$

(B) $Hxy + Fyz + Gxz = 0$

(C) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hxy + 2Gxz + 2Fyz = 0$

(D) None कोई नहीं

Q-28: The equation $\frac{l}{r} = \mathbf{1} + \boldsymbol{e\ cos\theta}$ represents a hyperbola if:

समीकरण $\frac{l}{r} = \mathbf{1} + \boldsymbol{e\ cos\theta}$ एक अतिपरवलय को निरूपित करता है–

(A) $\boldsymbol{e} = \mathbf{1}$ (B) $\mathbf{0} < e < 1$ (C) $\boldsymbol{e} > 1$ (D) $\boldsymbol{e} = -\mathbf{1}$

Q-29: An ellipse has

एक दीर्घवृत्त के

(A) no asymptotes कोई अनन्तस्पर्शियाँ नहीं

(B) one asymptote एक अनन्तस्पर्शी

(C) two asymptotes दो अनन्तस्पर्शियाँ

(D) many asymptotes कई अनन्तस्पर्शियाँ

Q-30: Equation $\frac{l}{r} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{sin}^{\mathbf{2}}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$ represents:

समीकरण $\frac{l}{r} = \mathbf{2}\ \boldsymbol{sin}^{\mathbf{2}}\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$ निरूपित करता है:

(A) ellipse दीर्घवृत्त (B) Hyperbola अतिपरवलय

(C) Parabola परवलय (D) a line एक रेखा

Q-31: For the conic $\frac{l}{r} = \mathbf{1} + \boldsymbol{ecos\theta}$ equation of directrix is-

शांकव $\frac{l}{r} = \mathbf{1} + \boldsymbol{ecos\theta}$ की नियता का समीकरण है–

(A) $\frac{l}{r} = \mathbf{1} - \boldsymbol{ecos\ \theta}$ (B) $\frac{l}{r} = \boldsymbol{ecos\ \theta}$

(C) $\frac{l}{r} = \mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos\ \theta}$ (D) None of these

Q-32: Equation of right circular cone with vertex origin and axis-*x*, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45^o}$(semi-vertical angle) is

लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण जिसका शीर्ष मूल बिंदु, अक्ष$-\boldsymbol{x}$ए $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{45^o}$ (अर्धशीर्ष कोण) है

(A) $x^2 + y^2 = z^2$ (B) $y^2 + z^2 = x^2$

(C) $x^2 + z^2 = y^2$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Q-33: Guiding curve of a right circular cylinder is-

लम्बवृत्तीय बेलन का निर्देशक वक्र है–

(A) ellipse दीर्घवृत्त (B) any closed curve कोई बंद वक्र

(C) circle वृत्त (D) pair of straight lines सरल रेखा का जोड़ा

Q-34: Equation of cone whose vertex is origin, is -

शंकु जिसका शीर्ष मूल बिंदु है, का समीकरण होता है –

(A) General equation of second degree द्विघात का व्यापाक समीकरण

(B) Homogenous equation of second degree द्विघात का समघात समीकरण

(C) Linear equation of first degree एक घात का रेखीय समीकरण

(D) None of the above उपर्युक्त में से कोई नहीं

Q-35: If the plane $ux + vy + wz = 0$ cuts the cone $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ in two perpendicular lines, then -

यदि समतल $ux + vy + wz = 0$ शंकु $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ को दो लम्बवत रेखाओं में प्रतिच्छेद करता हो तो

(A) $f(u, v, w) = 0$ (B) $f + g + h = 0$

(C) $a + b + c = 0$ (D) $(a + b + c)(u^2 + v^2 + w^2) - f(u, v, w) = 0$

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Short Answer Questions

Q-01: Find the nature, centre of conic and equation of asymphotes

दिये गए शांकव की प्रकृति, केन्द्र तथा अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$\boldsymbol{x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0}$$

Q-02: Find the polar equation of conic with its focus as pole and initial line as its axis.

शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए जब उसकी नाभि ध्रुव है तथा अक्ष प्रारम्भिक रेखा है।

Q-03: Prove that equations $\boldsymbol{\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta}$ and $\boldsymbol{\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta}$ represent same conic

दर्शाइये कि समीकरण $\boldsymbol{\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta}$ तथा $\boldsymbol{\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta}$ एक ही शांकव को निरूपित करती है।

Q-04: Find the equation of right circular cone with vertex as origin, vertical angle 60^o and equation of axis $\boldsymbol{x = t, y = 2t, z = 3t}$

उस लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिंदु है तथा अक्षरेखा $\boldsymbol{x = t, y = 2t, z = 3t}$ है तथा शीर्ष कोण 60[व] है।

Q-05: Find equation of right circular cyclinder with radius 2 and equation of axis $\boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}}$

लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 एवं अक्ष $\boldsymbol{\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}}$

Q-06: Find the equation of cone whose vertex is $(0, 0, 3)$ and base curve is the circle $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष $(0,0,3)$ और आधार वक्र, वृत्त $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$ है।

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Q-07: Find the equation to the cone with vertex at the origin and pass through the curve $\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 = 1}$ **and** $\boldsymbol{lx + my + nz = p}$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात करो जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है, तथा जो व्_

$\boldsymbol{ax^2 + by^2 + cz^2 = 1}$ **and** $\boldsymbol{lx + my + nz = p}$ से गुजरता है।

Q-08: Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and the base $ax^2 + by^2 = 1, \quad z = 0$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1, \quad z = 0$ है।

Q-09: To show that the equation of the right circular cone whose vertex is at the origin, semi-vertical angle is $\boldsymbol{\alpha}$ and axis along z-axis is $\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2 tan^2 \alpha}$.

सिद्ध कीजिए कि एक लंब वृतीय शंकु जिसका शीर्ष मूल बिन्दु है, अर्धशीर्ष कोण $\boldsymbol{\alpha}$ है तथा अक्ष> . अक्ष है, का समीकरण $\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2 tan^2 \alpha}$ है।

Q-10: Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and the base $ax^2 + by^2 = 1, \quad z = 0$

उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार वक्र $ax^2 + by^2 = 1, \quad z = 0$ है।

Q-11: Show that the plane $ax + by + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in two perpendicular lines if $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$

सिद्व कीजिये कि समतल $ax + by + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को दो लम्बरूप रेखाओं में प्रतिच्छेद करता है यदि $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$

Q-12: If $\boldsymbol{PSP'}$ is a focal chord of a conic $\boldsymbol{\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta}$ where $\boldsymbol{S}$ is focus then show that $\boldsymbol{\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}}$

यदि $\boldsymbol{PSP'}$ एक नाभीय जीवा है उस शांकव की जिसकी नाभि $\boldsymbol{S}$ तथा समीकरण $\frac{l}{r} = \mathbf{1} + e\cos\theta$ तो सिद्ध कीजिये $\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{l}$

Q-13: Find equation of right circular cone whose vertex is origin and axis $x = y = z$ with semivertical angle $\theta = 45^0$

लंब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष मूल बिंदु, अक्ष $x = y = z$ एवं अर्धशीर्षीय कोण $\theta = 45^0$ है–

Q-14: Find equation of cylinder whose generators are parallel to line $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ and base curve

$x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$

बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी जनक रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर है एवं जिसके आधार चक्र $x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ है–

Q-15: Find the polar equation of conic with its focus as pole and initial line as its axis.

शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए जब उसकी नाभि ध्रुव है तथा अक्ष प्रारम्भिक रेखा है।

Q-16: Prove that equations $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ and $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ represent same conic

दर्शाइये कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ तथा $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ एक ही शांकव को निरूपित करती है।

Q-17: Find the equation of right circular cone with vertex as origin, vertical angle 60^o and equation of axis $x = t, y = 2t, z = 3t$

उस लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष मूल बिंदु है तथा अक्षरेखा $x = t, y = 2t, z = 3t$ है तथा शीर्ष कोण 60$^{\text{व}}$ है।

Q-18: Find equation of right circular cyclinder with radius 2 and equation of axis $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$

लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 एवं अक्ष $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{6}$

Q-19: Find the equation of the right circular cylinder of radius 2 and having axis the line $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$.

लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 तथा अक्ष रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ है।

Q-20: Find the equation of the enveloping cylinder of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ whose generators are parallel to the line $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$.

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के अन्वालोपी बेलन जिसके जनक रेखा $\frac{x}{\ell} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के समान्तर है, का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Long Answer Questions

Q-01: Trace the conic $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$

शांकव $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Q-02: Find the equation of right circular cylinder with equation of base curve $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ and $x - y + z = 3$

उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशांक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है।

Q-03: If the normal at L, one of the extremities of the latus rectum of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ meets the curve again at Q then show that $SQ = \frac{l(1+3e^2+e^4)}{1+e^2-e^4}$

यदि शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ के नाभिलम्ब के एक सिरे L पर अभिलम्ब वक्र से पुनः Q पर मिलता है तब दर्शाइये कि $SQ = \frac{l(1+3e^2+e^4)}{1+e^2-e^4}$

Q-04: Find equation of enveloping cone for $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ with vertex at the point (x_1, y_1, z_1)

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के लिए अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (x_1, y_1, z_1) है।

Q−05: Trace the conic $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ and find the coordinates of its focus and the equation of directrix-

शांकव $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ का अनुरेखण कीजिये इसकी नाभियों के निर्देशांक और नियता का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Q-06: Prove that the angle between the lines given by $x + y + z = 0,\quad ayz + bzx + cxy = 0$ is $\pi/2$

if $a + b + c = 0$ but $\pi/3$ if $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

सिद्ध कीजिये कि $x + y + z = 0,\quad ayz + bzx + cxy = 0$ द्वारा प्राप्त रेखाओं के बीच को कोण $(\pi/2)$ है यदि $a + b + c = 0$ तथा $(\pi/3)$ यदि है $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

Q-07: Find the equation of a right circular cone whose vertex is $(1,1,1)$ axis is the line $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

and the semi-vertical angle is 30°.

उस लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष बिन्दु $(1,1,1)$ है, अक्ष $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ रेखा है। तथा अर्द्ध शीर्ष कोण 30 है।

Q-08: Show that the plane $\boldsymbol{z=0}$ cuts the enveloping cone of the sphere $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=11}$ which

has its vertex at $(\boldsymbol{2,4,1})$ in a rectangular hyperbola.

सिद्ध कीजिए कि समतल $\boldsymbol{z=0}$, गोले $\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=11}$ के अन्वालोपी शंकु को जिसका शीर्ष बिन्दु $(\boldsymbol{2,4,1})$ है एक समकोणिक अति परवलय में प्रतिच्छेदित करता है।

Q-09: Trace the conic $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$ and also find it's foci and eccentricity.

शांक्व $x^2+4xy+y^2-2x+2y-6=0$ का अनुरेखण कीजिये। साथ ही इसकी नाभियाँ एवं उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये।

Q-10: Prove that the angle between the lines given by $x+y+z=0, ayz+bzx+cxy=0$ is $\pi/2$ if $a+b+c=0$ but $\pi/3$ if $1/a+1/b+1/c=0$

दर्शाईये कि $x+y+z=0$ ए $ayz+bzx+cxy=0$ द्वारा प्राप्त रेखाओं के बीच का कोण $\pi/2$ है यदि $a+b+c=0$ तथा $\pi/3$ हैं यदि $1/a+1/b+1/c=0$

Q-11: Trace the conic $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ and find the coordinates of it's focus and the equation of directrix.

परवलय $9x^2+24xy+16y^2-2x+14y+1=0$ का अनुरेखण कीजिये तथा इसकी नाभियों के निर्देशांक और नियता का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Q-12: Find the equation of reciprocal cone to the cone $\boldsymbol{ax^2+by^2+cz^2=0}$.

शंकु $\boldsymbol{ax^2+by^2+cz^2=0}$ के व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये।

Q-13: Prove that confocal conics cut each other at right angles.

सिद्ध कीजिये संनाभि शांकव समकोण पर प्रतिच्छेद करती है।

Q-14: (a) The axis of a right circular cone, with vertex as origin O, makes equal angles with the coordinate axes and passes through the line drawn from O with direction cosines proportional to $1, -2, 2$. Find the equation of the cone.

एक लम्ब वृत्तीय शंकु का अक्ष, जिसका शीर्ष मूल बिंदु O है, निर्देशांकों के साथ बराबर कोण बनाता है और शंकु O से खींची गयी रेखा, जिसकी दिक्–कोज्यायें $1, -2, 2$ के समानुपाती हैं, से होकर जाता है। शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) Find the locus of the point from which three mutually perpendicular lines can be drawn to intersect the conic $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$.

उस बिंदु का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए, जहाँ से शांकव $z = 0, ax^2 + by^2 = 1$ को प्रतिच्छेद करती हुई, तीन परस्पर लम्ब रेखाएँ में खींची जा सकती है।

Q-15: (a) If a right circular cone has three mutually perpendicular generators, then show that the semi vertical angle is $tan^{-1}\sqrt{2}$.

यदि एक लम्ब वृत्तीय शंकु तीन परस्पर लम्बरूप जनकों को रखता है तो दर्शाइये कि शंकु का अर्द्ध–शीर्ष कोण $tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

(b) If the plane $2x - y + cz = 0$ cuts the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular lines, find the value of c.

यदि समतल $2x - y + cz = 0$ शंकु $yz + zx + xy = 0$ को लम्बवत रेखाओं में काटता है, तो c का मान ज्ञात कीजिए।

Q-17: Trace the parabola $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ and find the coordinates of its focus and the equation to its directrix.

परवलय $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 2x + 14y + 1 = 0$ का अनुरेखण कीजिए तथा नाभि के निर्देशांक एवं नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Q-18: (a) Show that the two conics $\frac{\ell_1}{r} = 1 + e_1\cos\theta$ and $\frac{\ell_2}{r} = 1 + e_2\cos(\theta - \alpha)$ will touch one another if ${\ell_1}^2(1 - {e_2}^2) + {\ell_2}^2(1 - {e_1}^2) = 2\ell_1\ell_2\,(1 - e_1e_2\,cos\alpha)$.

दर्शाइये कि दो शांकव $\frac{\ell_1}{r} = 1 + e_1\cos\theta$ एवं $\frac{\ell_2}{r} = 1 + e_2\cos(\theta - \alpha)$ एक दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि ${\ell_1}^2(1 - {e_2}^2) + {\ell_2}^2(1 - {e_1}^2) = 2\ell_1\ell_2\,(1 - e_1e_2\,cos\alpha)$

(b) Show that the locus of the foot of the perpendicular drawn from the focus of the conic $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ to its any tangent is $r^2(e^2 - 1) - 2\ell ercos\theta + \ell^2 = 0$.

सिद्ध कीजिए कि शांकव $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ को किसी स्पर्शरेखा पर नाभि से लम्ब पाद का बिंदु पथ $r^2(e^2 - 1) - 2\ell ercos\theta + \ell^2 = 0$ है।

Q-19: (a) If PSP' is a focal chord of the conic then prove that the tangents at P and P' intersects on the directrix.

यदि PSP' शांकव की एक नाभीय जीवा है, तो सिद्ध कीजिए कि P और P' पर स्पर्श रेखायें नियता पर प्रतिच्छेद करती है।

(b) If the normals at three points α, β and γ on the parabola $\frac{\ell}{r} = 1 + cos\theta$ meet at a point (e, ϕ) then prove that $2\phi = \alpha + \beta + \gamma$.

यदि परलवलय $\frac{\ell}{r} = 1 + cos\theta$ के तीन बिंदुओं α, β और γ पर अभिलम्ब बिंदु (e, ϕ) में प्रतिच्छेद करें, तो दर्शाइये कि $2\phi = \alpha + \beta + \gamma$.

Q-20: If the normal at L, one of the extremities of the latus rectum of the conic $\frac{l}{r} = 1 + ecos\,\theta$ meets the curve again at Q then show that $SQ = \frac{l(1+3\,e^2+e^4)}{1+e^2-e^4}$

यदि शांकव $\frac{l}{r} = 1 + ecos\,\theta$ के नाभिलम्ब के एक सिरे L पर अभिलम्ब वक्र से पुनः $\boldsymbol{Q}$ पर मिलता है तब दर्शाइये कि $\boldsymbol{SQ} = \boldsymbol{\frac{l(1+3\,e^2+e^4)}{1+e^2-e^4}}$.

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Multiple Choice Questions

Q-01: If curl $\vec{F} = \vec{O}$ then $\vec{F}$ is

यदि $\vec{F} = \vec{O}$ तो $\vec{F}$ एक

(A) Irrotational आघूर्णनीय (B) Solenoidal परिनालिकीय

(C) Harmonic हार्मोनिक (D) Constant अचर

Q-02: If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ then grad r is:

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तो हतंक r का मान है–

(A) $\vec{r}$ (B) $\hat{r}$ (C) r (D) None of these

Q-03: If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are coplanar vectors then $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] =$

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय सदिश है तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{o}$ (D) None of these

Q-04: The necessary and sufficient condition for the vector $\vec{a}(t)$ to have constant direction is-

किसी सदिश फलन $\vec{a}(t)$ की दिशा स्थिर होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि

(A) $\vec{a}.\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ (B) $\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ (C) $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ (D) None of these

Q-05: If $\vec{r} = a\,cost\,\hat{i} + b\,sint\,\hat{j} + bt\hat{k}$ then $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ is:

यदि $\vec{r} = a\,cost\,\hat{i} + b\,sint\,\hat{j} + bt\hat{k}$ then $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ का मानः

(A) $a^2 + b^2$ (B) a^2 (C) b^2 (D) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Q-06: $\boldsymbol{div}\ (\boldsymbol{curl}\ \vec{\boldsymbol{F}})=$

(A) Constant अचर (B) Scalar अदिश

(C) 0 (D) $\vec{\mathbf{0}}$

Q-07: $\boldsymbol{div}(\emptyset\vec{\boldsymbol{A}})$ is

(A) $\emptyset\ \boldsymbol{div}\ \vec{\boldsymbol{A}}$ (B) grad $\emptyset\ \boldsymbol{div}\ \vec{\boldsymbol{A}}$

(C) $\emptyset\ \boldsymbol{div}\ \vec{\boldsymbol{A}}+(\boldsymbol{grad}\emptyset).\vec{\boldsymbol{A}}$ (D) $\emptyset.\boldsymbol{div}\ \vec{\boldsymbol{A}}+(\boldsymbol{grad}\emptyset).\vec{\boldsymbol{A}}$

Q-08: If $\vec{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{x\hat{i}}+\boldsymbol{y\hat{j}}+\boldsymbol{z\hat{k}}$ then $\boldsymbol{curl}\ \vec{\boldsymbol{r}}$

यदि $\vec{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{x\hat{i}}+\boldsymbol{y\hat{j}}+\boldsymbol{z\hat{k}}$ तो $\boldsymbol{curl}\ \vec{\boldsymbol{r}}$ का मान

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) $\vec{\mathbf{0}}$

Q-09: If $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2$ then $\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{f}$ is

यदि $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2$ तो $\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{f}$ का मान है–

(A) $\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{2}\boldsymbol{y}$ (B) $\mathbf{2}\boldsymbol{x\hat{i}}+\mathbf{2}\boldsymbol{y\hat{j}}$ (C) $\mathbf{2}\boldsymbol{y\hat{i}}+\mathbf{2}\boldsymbol{x\hat{j}}$ (D) None of these

Q-10: If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are the three vectors, then value of $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$ is-

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश हो तो $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$ का मान है–

(A) $(a\times b)\,c$ (B) $\left(\vec{a}\,.\,\vec{b}\right)\times c$ (C) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (D) $\vec{a}\,.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

Q-11: If a and b are two vectors then the value of $\frac{d}{dt}(a \times b)$ will be-

यदि a और b दो सदिश हो तो $\frac{d}{dt}(a \times b)$ का मान होगा–

(A) $a \times \frac{db}{dt}$ (B) $a \times \frac{db}{dt} + b \times \frac{da}{dt}$

(C) $\frac{da}{dt} \times b$ (D) $\frac{da}{dt} \times b + a \times \frac{db}{dt}$

Q-12: A vector point function $\overline{\boldsymbol{F}}$ is called solenoidal, if and only if :

एक सदिश बिन्दु फलन $\overline{\boldsymbol{F}}$ परिनालिकीय (सोलेनोइडल) है यदि और केवल यदि

(A) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (B) $\nabla . \mathbf{F} = \mathbf{0}$

(C) $\nabla \nabla . \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (D) $\nabla^2 \mathbf{F} = \mathbf{0}$

Q-13: The value of $\boldsymbol{div\, \vec{r}}$ is : $\boldsymbol{div\, \vec{r}}$ का मान है–

(A) $\boldsymbol{r}$ (B) $\boldsymbol{2r}$ (C) $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}$ (D) $\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{r}}$

Q-14: If $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x^2yi - 2zj + (x^2 - z^2)k}$, then $\boldsymbol{div\, curl\, \vec{v}}$ is :

यदि $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{x^2yi - 2zj + (x^2 - z^2)k}$, तो $\boldsymbol{div\, curl\, \vec{v}}$ है

(A) $\boldsymbol{2xy - 2z}$ (B) $\boldsymbol{2xyi - 2zk}$

(C) $\mathbf{0}$ (D) $\boldsymbol{x^2y - 2z + x^2 - z^2}$

Q-15: The value of $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ is-

$\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ का मान है–

(A) $\int_S \vec{F} d\vec{r}$ (B) $\iint_S \vec{F}.\hat{n}ds$

C) $\iiint_V \vec{F}.\hat{n}ds$ (D) $\iint_S curl\vec{F}.\hat{n}ds$

Q-16: $\hat{i}\times\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)$ is equal to-

$\hat{i}\times\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)$ बराबर है–

(A) $\vec{o}$ (B) $\hat{i}$ (C) $\hat{j}$ (D) $\hat{k}$

Q-17: Unit vector and it's derivative are-

इकाई सदिश और उसका अवकलन होता है–

(A) Parallel समान्तर

(B) Orthogonal लाम्बिक

(C) Along the same direction एक ही दिशा में

(D) None of these इनमें से कोई नहीं

Q-18: The value of $[\vec{a}\,\vec{a}\,\vec{b}]$ is

$[\vec{a}\,\vec{a}\,\vec{b}]$ का मान है–

(A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

Q-19: The value of $(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}).(\hat{\jmath}\times\hat{k})$ is-

$(\hat{\imath}\times\hat{\jmath}).(\hat{\jmath}\times\hat{k})$ का मान है–

(A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) None of these

Q-20: The value of $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})$ is-

$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})$ का मान है–

(A) $\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$ (B) $\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}+\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$

(C) $\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}$ (D) $\frac{d\vec{a}}{dt}\times\frac{d\vec{b}}{dt}$

Q-21: If $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ then $div\,\vec{r}$ is

यदि $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ है तो $div\,\vec{r}$ है–

(A) 0 (B) $|\vec{r}|$ (C) 1 (D) 3

Q-22: If $\vec{A}$ is constatnt vector then $curl\,\vec{A}$ is

यदि $\vec{A}$ एक अचर सदिश है तो $curl\,\vec{A}$

(A) $|\vec{A}|$ (B) constant (C) $\vec{0}$ (D) 0

Q-23: $curl\ grad\ \emptyset =$

(A) $grad\ curl\ \emptyset$ (B) $curl\ \emptyset$

(C) $div\ \emptyset$ (D) $\vec{0}$

Q-24: $\nabla . \nabla\ \emptyset$ is-

(A) constant अचर (B) vector सदिश

(C) scalar अदिश (D) None कोई नहीं

Q-25: If $div\,\vec{F} = 0$ then F is -

यदि $div\,\vec{F} = 0$ तब F एक –

(A) irrotational आघूर्णनीय (B) solenoidal परिनालिकीय

(C) Harmonic हार्मोनिक (D) constant अचर

Q-26: If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ and $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ are reciprocal vector then $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' =$

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एवं $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ व्युत्क्रम सदिश हैं तो $\vec{a} \times \vec{a}' + \vec{b} \times \vec{b}' + \vec{c} \times \vec{c}' =$

(A) $\vec{0}$ (B) 1 (C) 3 (D) None of these इनमें से कोई नहीं

Q-27: If curl $\vec{F} = \vec{O}$ then $\vec{F}$ is

यदि $\vec{F} = \vec{O}$ तो $\vec{F}$ एक

(A) Irrotational आघूर्णनीय (B) Solenoidal परिनालिकीय

(C) Harmonic हार्मोनिक (D) Constant अचर

Q-28: If $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ then grad r is:

यदि $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ तो grad r का मान है–

(A) $\vec{r}$ (B) $\hat{r}$ (C) r (D) None of these

Q-29: If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are coplanar vectors then $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] =$

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय सदिश है तो $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] =$

(A) 0 (B) 1 (C) $\vec{o}$ (D) None of these

Q-30: The necessary and sufficient condition for the vector $\vec{a}(t)$ to have constant direction is-

किसी सदिश फलन $\vec{a}(t)$ की दिशा स्थिर होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि

(A) $\vec{a}.\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ (B) $\vec{a} \times \frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ (C) $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{0}$ (D) None of these

Q-31: If $\vec{r} = a\,cost\,\hat{\imath} + b\,sint\,\hat{\jmath} + bt\hat{k}$ $then$ $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ is:

यदि $\vec{r} = a\,cost\,\hat{\imath} + b\,sint\,\hat{\jmath} + bt\hat{k}$ $then$ $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ का मानः

(A) $a^2 + b^2$ (B) a^2 (C) b^2 (D) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Q-32: $div\,(curl\,\vec{F})$=

(A) Constant vpj (B) Scalar vfn'k

(C) 0 (D) $\vec{0}$

Q-33: $\boldsymbol{div}(\emptyset\vec{\boldsymbol{A}})$ is

(A) $\emptyset\ \boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}$ (B) grad $\emptyset\ \boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{A}}$

(C) $\emptyset\ \boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} + (\boldsymbol{grad}\emptyset).\vec{\boldsymbol{A}}$ (D) $\emptyset.\,\boldsymbol{div}\,\vec{\boldsymbol{A}} + (\boldsymbol{grad}\emptyset).\vec{\boldsymbol{A}}$

Q-34: If $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x\hat{\imath}} + \boldsymbol{y\hat{\jmath}} + \boldsymbol{z\hat{k}}$ then $\boldsymbol{curl}\,\vec{\boldsymbol{r}}$

यदि $\vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{x\hat{\imath}} + \boldsymbol{y\hat{\jmath}} + \boldsymbol{z\hat{k}}$ तो $\boldsymbol{curl}\,\vec{\boldsymbol{r}}$ का मान

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) $\vec{\boldsymbol{0}}$

Q-35: If $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$then $\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{f}$ is

यदि $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{y^2}$ तो $\boldsymbol{grad}\ \boldsymbol{f}$ का मान है–

(A) $\boldsymbol{2x} + \boldsymbol{2y}$ (B) $\boldsymbol{2x\hat{\imath}} + \boldsymbol{2y\hat{\jmath}}$ (C) $\boldsymbol{2y\hat{\imath}} + \boldsymbol{2x\hat{\jmath}}$ (D) None of these

Q-36: If $\overline{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{1},\boldsymbol{3}), \overline{\boldsymbol{b}} = (-\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{1}), \overline{\boldsymbol{c}} = (\boldsymbol{3},\boldsymbol{1},\boldsymbol{2})$, then $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot (\overline{\boldsymbol{b}} \times \overline{\boldsymbol{c}})$ =

(A) 10 (B) -10 (C) 20 (D) 14

Q-37: If $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}$ and $\overline{\boldsymbol{a}}', \overline{\boldsymbol{b}}', \overline{\boldsymbol{c}}'$ are reciprocal system of vectors then -

यदि $\overline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{b}}, \overline{\boldsymbol{c}}$ तथा $\overline{\boldsymbol{a}}', \overline{\boldsymbol{b}}', \overline{\boldsymbol{c}}'$ सदिशों के व्युत्क्रम निकाय है तो –

(A) $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}' + \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}' + \overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{0}$ (B) $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}' + \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}' + \overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{1}$

(C) $\overline{\boldsymbol{a}} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}' + \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \overline{\boldsymbol{b}}' + \overline{\boldsymbol{c}} \cdot \overline{\boldsymbol{c}}' = \boldsymbol{3}$ (D) None of the above

Q-38: If (यदि) $\overline{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{xi} + \boldsymbol{yj} + \boldsymbol{zk}$, then (तो) grad $\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\right)$ = …………

(A) $\frac{\overline{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r^2}}$ (B) $\frac{-\overline{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r^2}}$ (C) $\frac{-\hat{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r^2}}$ (D) $\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{\boldsymbol{r^2}}$

Q-39: $\boldsymbol{r^n \bar{r}}$ is solenoidal if $\boldsymbol{n} =$ …………..

$\boldsymbol{r^n \bar{r}}$ परीनालिकीय होगा यदि $\boldsymbol{n} =$ …………..

(A) 0 (B) 3 (C) –3 (D) None of the above

Q-40: div$(\bar{\boldsymbol{a}} \times \bar{\boldsymbol{b}})$ = ………….

(A) $\bar{\mathbf{0}}$

(B) $\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \text{curl}\, \bar{\boldsymbol{a}} - \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \textbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{b}}$

(C) $\bar{\boldsymbol{b}} \cdot \text{curl}\, \bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \textbf{curl}\, \bar{\boldsymbol{b}}$

(D) None of the above

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major   Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Short Answer Questions

Q-01: If $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{c} \times \vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{c} \times \vec{b}$ than prove that $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

यदि $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{c} \times \vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{c} \times \vec{b}$ तो सिद्ध कीजिएः $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

Q-02: If $\vec{a}$ is a constant vector then prove that $div(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$

यदि $\vec{a}$ अचर सदिश है तो सिद्ध कीजिएः $div(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$

Q-03: Find मान ज्ञात कीजिएः $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$

Q-04: Find the reciprocal system of vectors to the set of vectors $2i + 3j - k, \quad i - j - 2k, \quad -i + 2j + 2k$

निम्न सदिशों के व्युत्क्रम पद्धति के सदिश ज्ञात कीजियेः $2i + 3j - k, \quad i - j - 2k, \quad -i + 2j + 2k$

Q-05: If $a = Sin\theta i + Cos\theta j + \theta k, \quad b = Cos\theta i - Sin\theta j - 3k; \quad c = 2i + 3j - k$, then find the value of $\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ at point $\theta = 0$

यदि $a = Sin\theta i + Cos\theta j + \theta k, \quad b = Cos\theta i - Sin\theta j - 3k; \quad c = 2i + 3j - k$, हो तो $\theta = 0$ पर

$\frac{d}{d\theta}[a \times (b \times c)]$ का मान ज्ञात कीजिये।

Q-06: If $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$show that (a) $div\ \vec{r} = 3$ (b) $curl\,\vec{r} = 0$

यदि $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$दर्शाईये कि ;द्ध $div\ \vec{r} = 3$;इद्ध $curl\,\vec{r} = 0$

Q-07: Evaluate $\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ where $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ and the curve C is $y^2 = 4x$ in the XY- plane from (0,0)to (4,4)

$\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ और ह ए$y^2 = 4x$ए ग्ल समतल (0,0) से (4,4)तक है।

Q-08: If $\vec{a} = sin\,\theta\,\hat{\imath} + cos\,\theta\,\hat{\jmath} + \theta\hat{k}$, $\vec{b} = \cos\theta\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$, find $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]$at $\theta = 0$

यदि $\vec{a} = sin\,\theta\,\hat{\imath} + cos\,\theta\,\hat{\jmath} + \theta\hat{k}$, $\vec{b} = \cos\theta\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$, हो तो $\theta = 0$ पर $\frac{d}{d\theta}\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]$ ज्ञात कीजिये।

Q-09: If $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$show that $grad r^n = nr^{n-2}\,\vec{r}$ where $|\vec{r}| = r$

यदि $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$तो दर्शाईये कि $grad r^n = nr^{n-2}\,\vec{r}$ यदि $|\vec{r}| = r$

Q-10: If $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$show that (a) $div\ \vec{r} = 3$ (b) $curl\,\vec{r} = 0$

;fn $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$n'kkZbZ;s fd (a) $div\ \vec{r} = 3$ (b) $curl\,\vec{r} = 0$

Q-11: Evaluate $\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ where $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ and the curve C is $y^2 = 4x$ in the XY- plane from (0,0)to (4,4)

$\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = x^2y^2\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ और ह ए$y^2 = 4x$ए ग्ल समतल (0,0) से (4,4)तक है।

Q-12: Show that $\iint_S (ax\hat{\imath} + by\hat{\jmath} + cz\hat{k}).\hat{n}ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

दर्शाईये कि $\iint_S (ax\hat{\imath} + by\hat{\jmath} + cz\hat{k}).\hat{n}ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$ जहाँ` गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$का सम्पूर्ण पृष्ठ है।

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Q-13: Use Stoke's theorem to prove that $\int_C (e^x dx + 2ydy - dz) = 0$where C is the curve given by $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$

स्टोक्स प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि $\int_C (e^x dx + 2ydy - dz) = 0$ जहाँ ह वक्र $x^2 + y^2 = 4,\ z = 2$है।

Q-14: Prove that $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

सिद्ध कीजिये $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

Q-15: Show that the vector -

$\vec{F} = (x + 3y)\hat{\imath} + (y - 2z)\hat{\jmath} + (x - 2z)\hat{k}$ is a solenoidal.

दर्शाइये कि सदिश $\vec{F} = (x + 3y)\hat{\imath} + (y - 2z)\hat{\jmath} + (x - 2z)\hat{k}$ एक परिनालिकीय सदिश है–

Q-16: Show that the vector

$\vec{F} = (\sin y + z)\hat{\imath} + (x \cos y - z)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$ is irrotational vector.

सिद्ध कीजिये सदिश $\vec{F} = (\sin y + z)\hat{\imath} + (x \cos y - z)\hat{\jmath} + (x - y)\hat{k}$ एक आघूर्णी सदिश है–

Q-17: If (यदि) $\vec{r}(t) = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ when (जब) $t = 2$

$\vec{r}(t) = 4\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ when (जब) $t = 3$

Then prove that (तो सिद्ध कीजिय)

$\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ dt=10

Q-18: If (यदि) $\vec{r}(t) = 5t^2\hat{\imath} + \hat{t\jmath} - t^3\hat{k}$ then show that (तो सिद्ध कीजिये)–

$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ dt = $-14\hat{\imath} + 75\hat{\jmath} - 15\hat{k}$

Q-19: If $\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{c} \times \vec{a}, \frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{c} \times \vec{b}$ than prove that $\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

Q-02: If $\vec{a}$ is a constant vector then prove that $div(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$

यदि $\vec{a}$ अचर सदिश है तो सिद्ध कीजिए: $div(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$

Q-21: Find मान ज्ञात कीजिए: $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$

Q-22: Show that necessary and sufficient condition for the vector $\bar{a}\ (t)$ to have constant direction is $\bar{a} \times \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{0}$.

दर्शाइये कि किसी सदिश $\bar{a}\ (t)$ की स्थिर दिशा होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध $\bar{a} \times \frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{0}$ है।

Q-23: If $\bar{a}$ is a constant vector, then show that curl $(\bar{a} \times \bar{r}) = 2\bar{a}$.

यदि $\bar{a}$ एक अचर सदिश हो तो सिद्ध कीजिए कि curl $(\bar{a} \times \bar{r}) = 2\bar{a}$ण

Q-24: Prove that curl $[\bar{r} \times (\bar{a} \times \bar{r})] = 3\bar{r} \times \bar{a}$, where $\bar{a}$ is a constant vector.

सिद्ध कीजिए कि curl $[\bar{r} \times (\bar{a} \times \bar{r})] = 3\bar{r} \times \bar{a}$ जहाँ $\bar{a}$ एक नियत सदिश है।

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Long Answer Questions

Q-01: Find $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath}$ and C is a rectangle in **XY** plane bounded by

$x = o, y = a, x = a, y = o$

$\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए जहां $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath}$ तथा C, **XY** समतल मे c एक आयत है जो $x = o, y = a, x = a, y = o$ से घिरा है।

Q-02: Prove that $grad\,(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{A}.\nabla)\vec{B} + (\vec{B}.\nabla)\vec{A} + \vec{A} \times curl\,\vec{B} + \vec{B} \times curl\,\vec{A}$

Q-03: Prove that सिद्व कीजिए: $div\ grad\ r^m = m(m+1)r^{m-2}$

Q-04: Evaluate $\iint_s (yz\hat{\imath} + zx\hat{\jmath} + xy\hat{k}).ds$ where S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ in first octant.

$\iint_s (yz\hat{\imath} + zx\hat{\jmath} + xy\hat{k}).ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहां S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ पृष्ठ है जो कि प्रथम अष्टांश में स्थित ळें

Q-05: Find the directional derivative of the function $\emptyset = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ at the point $P(1, 1, -1)$ in the direction $2i + j - k$.

फलन $\emptyset = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का बिंदु $P(1, 1, -1)$ पर $2i + j - k$ की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।

Q-06: Evaluate $\int\int_s F.n\ ds$ with the help of Gauss's divergence theorem for

$\vec{F} = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ taken over the region S bounded by $x^2 + y^2 = 4, z = 0\ and\ z = 3.$

गॉस डाइवरजैन्स प्रमेय की सहायता से $\int\int_s F.n\ ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहां $\vec{F} = 4xi - 2y^2 j + z^2 k$ क्षेत्र $x^2 + y^2 = 4, z = 0\ and\ z = 3$ से बद्ध है।

B. Sc I Year Mathematics

Paper: Major Title: Algebra, Vector and Geometry

Question Bank

Q-07: Prove that $curl\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A}$

सिद्व कीजिये कि $curl\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A}$

Q-08: Verify Stoke's theorem when $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the *XY*- plane.

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$ तथा पृष्ठ` गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$का ग्ल्समतल के ऊपर का भाग है।

Q-09: If $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$are reciprocal vectors of vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ respectively then prove that $\vec{a}' \times \vec{b}' + \vec{b}' \times \vec{c}' + \vec{c}' \times \vec{a}' = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]}$ if vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ are non coplanar

यदि $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$क्रमशः सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ के व्युक्रम सदिश हैं तो सिद्व कीजिये कि– $\vec{a}' \times \vec{b}' + \vec{b}' \times \vec{c}' + \vec{c}' \times \vec{a}' = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]}$ जहाँ सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$असमतलीय हैं।

Q-10: Prove that $curl\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A}$

सिद्व कीजिये कि $curl\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \left(\vec{B}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\,.\,\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{A}\,div\,\vec{B} - \vec{B}\,div\,\vec{A}$

Q-11: Evaluate $\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath}$ and C is the rectangle in the *XY*-plane bounded by $y = 0, x = a\,; y = b, x = 0$

$\int_C \vec{F}\,.\,d\,\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} - 2xy\hat{\jmath}$ तथा C, *XY*.समतल का एक आयत है जो $y = 0, x = a\,; y = b, x = 0$ से घिरा है।

Q-12: Use Green's Theorem in plane to evaluate $I = \oint_c \{(x + 2y)dx + (y + 3x)dy\}$ where C is the circle $x^2 + y^2 = 1$

समतल में ग्रीन के प्रमेय का सत्यापन $I = \oint_c \{(x + 2y)dx + (y + 3x)dy\}$ के लिए कीजिए, जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

Dr Sabha Kant Dwivedi, Professor in Mathematics, IEHE, Bhopal, M.P.

Q-13: Verify Stoke's theorem when $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$and surface S is the part of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above the *XY*- plane.

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए जब $\vec{F} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$ तथा पृष्ठ गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$का *XY*. समतल के ऊपर का भाग है।

Q-14: Show that $\boldsymbol{\nabla^2(r^n\vec{r}) = n(n+3)r^{n-2}\vec{r}}$ where $\boldsymbol{\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}$

सिद्ध कीजिये $\boldsymbol{\nabla^2(r^n\vec{r}) = n(n+3)r^{n-2}\vec{r}}$ जहाँ $\boldsymbol{\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}$ है।

Q-15: Evaluate $\iint_3 \boldsymbol{\vec{F}.\hat{n}\, ds}$ where $\boldsymbol{\vec{F} = 4x\hat{\imath} - 2y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}}$, $\boldsymbol{S}$ is surface bounded by

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3}$

मान ज्ञात कीजिये $\iint_3 \boldsymbol{\vec{F}.\hat{n}\, ds}$ $\boldsymbol{\vec{F} = 4x\hat{\imath} - 2y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 3}$ से परिबद्ध प्रदेश है।

Q-16: Evaluate $\int_c (\boldsymbol{e^{-x}\sin y\, dx + e^{-x}\cos y\, dy})$ where $\boldsymbol{C}$ is a rectangle with vertices $\boldsymbol{(0,0), (\pi,0), (\pi, \pi/2), (0, \pi/2)}$

मान ज्ञात कीजिये $\int_c (\boldsymbol{e^{-x}\sin y\, dx + e^{-x}\cos y\, dy})$ जहाँ $\boldsymbol{C}$ एक आयत है जिसके शीर्ष $\boldsymbol{(0,0), (\pi,0), (\pi, \pi/2), (0, \pi/2)}$ है।

Q-17: If $\boldsymbol{\vec{a}}$ is a constant vector then show that –

यदि $\boldsymbol{\vec{a}}$ एक अचर सदिश है तो दिखाईये–

(i) $\boldsymbol{div\,(\vec{r} \times \vec{a}) = 0}$
(ii) $\boldsymbol{curl(\vec{r} \times \vec{a}) = -2\vec{a}}$

Q-18: Find directional derivative of $\boldsymbol{\frac{1}{r}}$ in the direction of $\boldsymbol{\vec{r}}$ where $\boldsymbol{\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}$

फलन $\boldsymbol{\frac{1}{r}}$ का दिशीय अवकलज सदिश $\boldsymbol{\vec{r}}$ की दिशा में ज्ञात कीजिये जहां $\boldsymbol{\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}$ है

Q-19: Evaluate $\int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$, where $\bar{F} = xyi + (x^2+y^2)j$ and C is the rectangle in the xy-plane bounded by the lines $y = 2, x = 1, y = 10$ and $x = 4$.

$\int_c \bar{F}\cdot d\bar{r}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $\bar{F} = xyi + (x^2+y^2)j$ और ब्ए xy–समतल में एक आयत है जो सरल रेखाओं $y = 2, x = 1, y = 10$ तथा $x = 4$ से परिबद्ध है।

Q-20: (a) Discuss Surface Integral.

पृष्ठीय समाकल की विवेचना कीजिए।

(b) Evaluate $\int_s \bar{F}\cdot \hat{n}\, ds$, where $\bar{F} = yi + 2xj + zk$ and S is the surface of the plane $2x + y = 6$ in the first octant cut off by the plane $z = 4$.

$\int_s \bar{F}\cdot \hat{n}\, ds$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ S प्रथम अष्टांशक में समतल $2x + y = 6$ का पृष्ठ है, जो समतल $z = 4$ से काटा गया है।

Q-21: Evaluate $\iint_S (yz\hat{\imath} + zx\hat{\jmath} + xy\hat{k}).ds$ where S is the surface of the sphere $x^2+y^2+z^2 = 1$ in first octant.

$\iint_S (yz\hat{\imath} + zx\hat{\jmath} + xy\hat{k}).ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहां S गोले $x^2+y^2+z^2 = 1$ पृष्ठ है जो कि प्रथम अष्टांश में स्थित ळें

....

Question bank

B.sc I year

Paper-Major-2/Minor/Open Elective

Title: Calculus and Differential Equation

Part- A

Very Short Question

Q. 1 If $f(x) = xe^x$, then $f^n(x)$ is _______

यदि$f(x) = xe^x$,तब $f^n(x)$ होगा ....

Q. 2 $D^n(ax + b)^m =$

Q. 3 if $cosx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ then $a_3$is

यदि$cosx = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ तब $a_3 =$

Q. 4 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ .... is the expansion of which function.

श्रेणी $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$ .... किस फलन का प्रसार है।

Q. 5 If$z = e^{xy}$, then find $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

यदि$z = e^{xy}$, तब $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ज्ञात करें।

Q. 6 If $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$, then find $f_x(0, 0)$

यदि$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 1}$, तब $f_x(0, 0)$ज्ञात करो।

Q. 7 Find the degree of $f(x, y)$= $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$f(x, y)$= $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ की घात ज्ञात करे।

Q. 8 If $u = xysin\left(\frac{y}{x}\right)$, then find $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$

यदि $u = xysin\left(\frac{y}{x}\right)$, तब $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात करें।

Q. 9 Find the asymptotes of the curve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ की अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात करें।

Q. 10 Find the equation of asymptote for the curve
$x^2y^2 + x^3y^3 = x^3 + y^3$, which is parallel to y-axis.
वक्र $x^2y^2 + x^3y^3 = x^3 + y^3$, की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात करें जो y- अक्ष के समानान्तर है।

Q. 11 If $s = c\ sec\varphi$ find p.

यदि $s = c\ sec\varphi$ हो तब p ज्ञात करों।

Q. 12 Find the radius of curvature of the curve $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ at origin

मूल बिन्दू पर वक्र $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करें।

Q. 13 Find the multiple points of the curve $y^3 + 3ax^2 + x^3 = 0$

वक्र $y^3 + 3ax^2 + x^3 = 0$ का बहुल बिन्दु ज्ञात करें।

Q. 14 Solve $\int Sin^3x dx$

हल करें $\int Sin^3x dx$

Q. 15 Solve $\int \frac{1}{4+sin^2x} dx$

हल करें $\int \frac{1}{4+sin^2x} dx$

Q. 16 Solve $\int_0^a \int_0^b xy\ dxdy$

हल करें$\int_0^a \int_0^b xy\, dxdy$

Q. 17 Solve $\int_1^2 \int_0^{3/2} \left(\frac{x}{y}\right)^2 dydx$

हल करें $\int_1^2 \int_0^{3/2} \left(\frac{x}{y}\right)^2 dydx$

Q. 18 $\int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x+y)\, dydx$

Q. 19 Solve $\int_1^{2a} \int_0^{\sqrt{2a-x^2}} xy\, dydx$

हल करें$\int_1^{2a} \int_0^{\sqrt{2a-x^2}} xy\, dydx$

Q. 20 Find the value of $\int_0^{\pi/2} sin^4x\ cos^2x\ dx$

$\int_0^{\pi/2} sin^4x\ cos^2x\ dx$ का मान ज्ञात करें।

Q. 21 Find the value of $\int_0^2 x^3(1-x^2)^{3/2}dx$

$\int_0^2 x^3(1-x^2)^{3/2}dx$ का मान ज्ञात करें।

Q. 22 $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx =$

Q. 23 Find the area of one loop of $r^2 = a^2cos2\theta$

$r^2 = a^2cos2\theta$ के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात करे।

Q. 24 Find the area of r = $2acos\theta$

r= $2acos\theta$ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Q. 25 Write the intrensic equation of circle of radius a

a त्रिज्या वाले वृत्त का नैज समीकरण लिखे।

Q. 26 Write the length of curve for r = acosθ

वक्र r = acosθ की लम्बाई लिखे।

Q. 27 Write the formula for length of arc in parametric form.

प्रचलिक समीकरणों का चाप सूत्र लिखो।

Q. 28 Write the value of $\lceil 1/2$,$\lceil 1$

$\lceil 1/2$,$\lceil 1$ का मान लिखे।

Q. 29 Solve $\int sin\frac{1}{x}dx$

हल करे$\int sin\frac{1}{x}dx$

Q. 30 $\int \sqrt{x^2+a^2}dx =$

Q. 31 Find the I.F. of $cos^2x\frac{dy}{dx}+y = tanx$

$cos^2x\frac{dy}{dx}+y = tanx$ का I.F. ज्ञात करे।

Q. 32 Find the I.F. of $\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y = x^2$

$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y = x^2$ का I.F. ज्ञात करे।

Q. 33 Mdx + Ndy = 0 is exact if $\frac{\partial M}{\partial y} =$

Mdx + Ndy = 0 यथातथ होती है यदि $\frac{\partial M}{\partial y} =$

Q. 34 If $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=F(y)$ then IF is

यदि $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=F(y)$ तब IF होगा।

Q. 35 Write clairaut's equation

क्लेरो का समीकरण लिखो।

Q. 36 Write Lagrange's equation.

लैग्रांज का समीकरण लिखे।

Q. 37 Solve y = px + ap (1- p)

हल करे y = px + ap (1- p)

Q. 38 Examine that $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ is exact

दिखाइए कि $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ यथातथ समीकरण है।

Q. 39 Write Bernouli's equation

बर्नोली का समीकरण लिखे।

Q. 40 $\frac{dy}{dx}+Py=\ Q$ is which differential equation

$\frac{dy}{dx}+Py=\ Q$ कौन सा अवकल समीकरण है।

Q. 41 Write the Auxiliary equation of $(D^3 - 6D^2 + 7D - 7)\ y = 0$

$(D^3 - 6D^2 + 7D - 7)\ y = 0$ का सहायक समीकरण लिखे।

Q. 42 Solve $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-4y=0$

हल कर` $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}-4y=0$

Q. 43 Solve $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

हल करे $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

Q. 44 $\frac{1}{(D-a)^n} e^{ax} =$

Q. 45 $\frac{1}{D^2+a^2} Sinax =$

Q. 46 Find the complementary of $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = Sinx$

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = Sinx$का पूरक फलन ज्ञात करे।

Q. 47 Write the condition when y = e^{ax} is the solution of $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$

y = e^{ax} समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ का हल कब होगा।

Q. 48 If P + Qx = 0 then the part of complementary function of is _______

यदि P + Qx = 0 तब समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ के पूरक फलन का भाग होगा **जब** ..

Q. 49 C.F. of $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x sinx$ is

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^x sinx$ का C.F. होगा

Q. 50 Find the C.F. of $(D^4-1)y = Cosx$

$(D^4- 1)y = Cosx$ का C.F. ज्ञात करे।

Answers of Part –A

1. $(x+n)e^x$

2. $\frac{m!}{(m-n)!}a^m(ax+b)^{m-n}$

3. 1

4. Sin$x$

5. $(xy+1)e^{xy}$

6. 0

7. 0

8. 2u

9. bx = $\pm$ ay

10. x = $\pm$ 1

11. csecφ tan φ

12. 2/3

13. (a, a)

14. –cosx + $\frac{cox^3x}{3}$

15. $\frac{1}{\sqrt{5}}tan^{-1}(\sqrt{5}tanx)$

16. $\frac{1}{4}a^2b^2$

17. $\frac{3}{4}$

18. 0

19. $\frac{a^4}{3}$

20. $\frac{\pi}{32}$

21. $\frac{\pi}{32}$

22. $\frac{-\pi}{2}log2$

23. $\frac{a^2}{2}$

24. $2\pi a^2$

25. $S = a\varphi$

26. πa

27. S = $\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

28. $\sqrt{\pi}, 1$

29. $logx + \frac{1}{312x^2} - \frac{1}{514x^2} \dots ..$

30. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}Sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

31. e^{tanx}

32. x^3

33. $\frac{\partial N}{\partial x}$

34. $e^{\int F(y)dy}$

35. $y = px + f(p)$

36. $y = x\,f(p) + \emptyset(p)$

37. $y = cx + ac\,(1 - c)$

38. Yes

39. $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$

40. Linear differential equation / रैखिक अवकल समीकरण

41. $m^3 - 6m^2 + 7m - 7 = 0$

42. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$

43. $y = \; c_1e^{-x}\cos(2x + c_2)$

44. $\frac{x^n}{n!}e^{ax}$

45. $\frac{-x}{2a}cosax$

46. $c_1Cos\;2x + c_2Sin2x$

47. $a^2 + aP + Q = 0$

48. $y = x$

49. $(c_1 + c_2x)e^x$

50. $c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3cos(x + \; c_4)$

PART – B

Short Answer Type Question

Q. 1 Write a short note about the contribution of vedic age in mathematics.
वैदिक काल में गणित के योगदान के बारे में लिखिए।

Q. 2 If $y = acosmx + B\ sinmx$, then prove $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$
यदि$y = acosmx + B\ sinmx$ तो दर्शाइये $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2y = 0$

Q. 3 If $y = e^{ax}\sin bx$, prove $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)\ y = 0$
यदि $y = e^{ax}\sin bx$ सिद्ध कीजिए $y_2 - 2ay_1 + (a^2 + b^2)\ y = 0$

Q. 4 Expand $\tan^{-1}x$ using Maclaurin's expansion .
$\tan^{-1}x$ का मैक्लरिन श्रेणी प्रसार कीजिए।

Q. 5 If $u = e^{xyz}$, then prove that $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$
यदि $u = e^{xyz}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$

Q. 6 Find the radius of curvature of $y^2 = 4ax$.
$y^2 = 4ax$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करे।

Q. 7 Find the radius of curvature in polar form.
वक्रता त्रिज्या के लिए ध्रुवीय सूत्र ज्ञात करे।

Q. 8 Find the point of inflexion for $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$
वक्र $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ के नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Q. 9 Solve $\int sin^7 x dx$

$\int sin^7 x dx$ हल करे।

Q. 10 Solve $\int \frac{dx}{1+3sin^2 x}$

$\int \frac{dx}{1+3sin^2 x}$का मान निकालो।

Q. 11 Solve $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dydx$.

$\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dydx$ हल करे।

Q. 12 Solve $\int_0^{\pi/4} tan^5 x dx$

हल करे–$\int_0^{\pi/4} tan^5 x dx$

Q. 13 Find the length of arc y = log secx, x = 0 to x = π/3

वक्रy = log secx, x = 0 सेx = π/3 के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Q. 14 Find the area between the curve $y = x^2$ *and* $y = x$

परवलय $y = x^2$ और $y = x$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Q. 15 Solve $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = sinx$

$\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = sinx$ को हल करे।

Q. 16 Solve $\frac{xdy}{dx} + y = xy^3$

$\frac{xdy}{dx} + y = xy^3$को हल करे।

Q. 17 Solve $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$

$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$ को हल करे।

Q. 18 Solve $p^2 - 5p + 6 = 0$

$p^2 - 5p + 6 = 0$ को हल करे।

Q. 19 Solve $y = px + \sqrt{1 + p^2}$

$y = px + \sqrt{1 + p^2}$ को हल करे।

Q. 20 Find the orthogonal trajectory of $3xy = x^3 - a^3$

$3xy = x^3 - a^3$का लम्बकोणीय संछेदी ज्ञात करें।

Q. 21 Solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + y = 0$ को हल करे।

Q. 22 Solve by variation of parameter $\frac{d^2y}{dx^2} + y = cosecx$

प्रचल विचरण की विधि से$\frac{d^2y}{dx^2} + y = cosecx$ को हल करें।

Q. 23 Solve $(D^4 - 5D^2 + 4)\ y = 0$

$(D^4 - 5D^2 + 4)\ y = 0$ को हल करे

Q. 24 Solve - $(D^4 + m^4)y = 0$

$(D^4 + m^4)\ y = 0$ को हल करें

Q. 25 Solve $(D^2 + D-2)\ y = e^x$

$(D^2 + D-2)\ y = e^x$को हल करे।

PART- C

Long Answer Type Question

Q. 1 If y = a cos logx + b sin logx, then prove $x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$

यदिy = a cos logx + b sin logx सिद्ध करे $x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$

Q. 2 Prove that $e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{2^2 x^4}{4!} - \frac{2^2 x^5}{5!} \ldots \ldots$

सिद्ध करे की $e^x \cos x = 1 + x - \frac{2x^3}{3!} - \frac{2^2 x^4}{4!} - \frac{2^2 x^5}{5!}$........

Q. 3 Prove that $\log secx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$

सिद्ध करे की $logsecx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$

Q. 4 If$u = Sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ then show that $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$

यदि$u = Sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$

Q. 5 Find the asymptotes of $x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$

निम्न लिखित वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए $x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$

Q. 6 Find the asymptotes of $x^3 + y^3 = 3axy$

निम्नलिखित वक्र की अनन्तस्पशियाँ ज्ञात कीजिए $x^3 + y^3 = 3axy$

Q. 7 Prove that the radius of curvature of $x = a(t + sint), y = a(1 - cost)$ is $P = 4acos\frac{t}{2}$

सिद्ध करे की $x = a(t + sint), y = a(1 - cost)$ की वक्रता त्रिज्या $P = 4acos\frac{t}{2}$होती है।

Q. 8 Prove that if $r^n = a^n cosn\theta$ then radius of curvature is $P = \frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$

यदि $r^n = a^n cosn\theta$ तब वक्रता त्रिज्या $P = \frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$ होती है।

Q. 9 Trace the curve $y^2(2a-x)=x^3$

$y^2(2a-x)=x^3$का अनुरेखण करे।

Q. 10 Trace the curve $ay^2=x^2(a-x)$

$ay^2=x^2(a-x)$ का अनुरेखण करे।

Q. 11 Solve$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2cos^2x+b^2sin^2x}$

हल करें $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2cos^2x+b^2sin^2x}$

Q. 12 Solve $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5cosx}$

$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4+5cosx}$ हल करें

Q. 13 Solve $\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$

हल करें $\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$

Q. 14 Show that $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}dx=\frac{3\pi}{128}$

सिद्ध कीजिए कि $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2}dx=\frac{3\pi}{128}$

Q. 15 Find the area of ellipse

दीर्घवृत का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

Q. 16 Solve $(1+y^2)dx=(tan^{-1}y-x)dy$

हल करें $(1+y^2)dx=(tan^{-1}y-x)dy$

Q. 17 Solve $x\frac{dy}{dx}+y=y^2logx$

हल करें $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 logx$

Q. 18 Solve $xdx + ydy = \frac{a^2(xdy - ydx)}{x^2+y^2}$

हल करें $xdx + ydy = \frac{a^2(xdy - ydx)}{x^2+y^2}$

Q. 19 Solve $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

हल करें $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

Q. 20 Solve $p = log(px - y)$

हल करें$p = log(px - y)$

Q. 21 Solve $(D^2 + 1)y = (e^x + 1)^2$

हल करें $(D^2 + 1)y = (e^x + 1)^2$

Q. 22 Solve $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 9y = 40sin5x$

हल करें $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 9y = 40sin5x$

Q. 23 Solve $(D^2 + 4)y = sin2x + e^x$

हल करें $(D^2 + 4)y = sin2x + e^x$

Q. 24 Solve $x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$

हल करें $x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$

Q. 25 Solve $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 logx$

हल करें $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 3y = x^2 logx$

GOVT DR SHYAMA PRASAD MUKHERJEE SCIENCE & COMMERCE

Question Bank

Class – B.Sc. II Year

Paper- I

Very short answer type questions:

1. किसी समूह का तत्समक अवयव अद्वितीय होता है |
   उपपत्ति : मान लो किसी समूह G के दो तत्समक अवयव e और e_1 हैं |
   अब e को तत्समक अवयव लेने पर, $ee_1 = e_1$
   एवं e_1 को तत्समक अवयव लेने पर, $ee_1 = e$
   अतएव $e_1 = ee_1 = e.$
   अतः एक समूह का तत्समक अवयव अद्वितीय है |

   Show that the identity element of a group is unique.
   Ans. let e and e_1 be two identity elements of group G. Then, we have $ee_1 = e_1$ if e is the identity and $ee_1 = e$ if e_1 is the identity.
   But ee_1 is a unique element of G .
   Therefore, $ee_1 = e$ and $ee_1 = e_1 \Rightarrow e = e_1$.
   Hence the identity is unique.

2. आबेली समूह को समझाइए |

:$-G_5$ संक्रिया "o" G में क्रमविनिमयी है, अर्थात, $a\ o\ b = b\ o\ a,$ सभी $a, b\ \in G$ के लिए, तो बीजीय संरचना$(G, o\ )$ कहलाती है |

Discuss an abelian group.
Ans. A group $(G, o\ )$ is said to be an abelian or commutative if in addition to four group axioms the following postulate is also satisfied.
G_5. **Commutativity**. The binary operation "o" in commutative in G i.e,

$$a\ o\ b = b\ o\ a\ \ \forall\, a, b\ \in G\ .$$

3. समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए |
   :- समूह G के सभी स्व - संयुग्मी अवयवों का एक समुच्चय Z समूह G का केंद्र (centre) कहलाता है |
   प्रतीकात्मक रूप में, $Z = \{z \in G \mid zx = xz \quad \forall\, x\ \in G\}$.

   Define centre of a group.
   Ans. The set Z of all self - conjugate elements of group G is called centre of a group G . Symbolically

$$Z = \{z \in G \mid zx = xz \quad \forall\, x\ \in G\}\ .$$

4. दर्शाइए की यदि एक G समूह का प्रत्येक अवयव स्वयं का प्रतिलोम (व्युत्क्रम) है, तब G आबेली है |

:- मानलो $a, b \in G$ स्वेच्छ है | तब [G के संवरक गुणधर्म से]

$a, b \in G \Rightarrow ab \in G \quad \forall a, b \in G$ [परिकल्पना से]

$\Rightarrow (ab)^{-1} = ab$

अब $(ab)^{-1} = ab \Rightarrow b^{-1}a^{-1} = ab$

$\Rightarrow ba = ab$ [$a^{-1} = a, b^{-1} = b$]

अतः $ab = ba \ \forall a, b \in G$ फलतः G एक आबेली समूह है |

Prove that if every element of a group G is its own inverse, then G is an abelian group.

Ans. Let $a, b \in G$ [closure properity of G]

$a, b \in G \Rightarrow ab \in G \quad \forall a, b \in G$ [by hypothesis]

$\Rightarrow (ab)^{-1} = ab$

Then, $(ab)^{-1} = ab \Rightarrow b^{-1}a^{-1} = ab$

$\Rightarrow ba = ab$ [$a^{-1} = a, b^{-1} = b$]

$ab = ba \ \forall a, b \in G$ is an abelian group.

5. दिखाइए कि $363x \equiv 99 \ (mod\ 22)$ का हल है |

:- चूंकि g.c.d. $(363, 22) = 11$ और $99, 11$ से विभाज्य है | अतः इसका हल है |

Show that there is a solution of $363x \equiv 99 \ (mod\ 22)$

Ans. Since g.c.d. $(363, 22) = 11$ and 99 is divisible by 11. Hence its solution exists.

6. समूह में $\{1, -1, i, -i\}$, i की कोटि क्या होगी ?

:- i की कोटि 4 होगी |

In group $\{1, -1, i, -i\}$, what will be the order of i ?

Ans. Order of i will be 4.

7. उपसमूह को उदाहरण सहित समझाइए |

:- एक समूह$(G, *)$ का एक अरिक्त उपसमुच्चय H, G का एक उपसमूह कहलाता है, यदि

(i) H संक्रिया ‘ * ‘ के लिए स्थिर है,

(ii) $(H, *)$ एक समूह है |

Define Subgroup.

Ans. A non-empty subset H of a group G is called a subgroup of G if

(i) H is stable for the composition in G.

(ii) H is a group for the composition in G.

8. यदि G एक परिमित समूह है और $a \in G$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{o\,(G)} = e.$

:- चूंकि एक परिमित समूह के किसी अवयव की कोटि को समूह की कोटि विभाजित करती है , अतएव $\frac{o(a)}{o(G)}$.

$\therefore$ o$(G) = K.o\,(a)$ किसी पूर्णांक K के लिए,

अतः $a^{o\,(G)} = a^{K.o\,(a)} = (a^{o\,(a)})^{\,K} = e^K = e.$

If G is a finite group and $a \in G$, then prove that $a^{o\,(G)} = e.$

Ans. Since the order of any element of a finite group divides the order of the group, so $\frac{o(a)}{o(G)}$.

$\therefore$ o$(G) = K.o\,(a)$ for an integer K.

Hence $a^{o\,(G)} = a^{K.o\,(a)} = (a^{o\,(a)})^{\,K} = e^K = e.$

9. चक्रीय समूह को समझाइए |

:- एक समूह $(G,\ .)$ चक्रीय कहलाता है यदि $a \in G$ के लिए प्रत्येक अवयव $a \in G$, $a^{\,n}$ के रूप का है, जहां n पूर्णांक है | प्रतीकात्मक रूप में,

$$G = \{a^n |\, n \in I\}$$

अवयव a को G का जनक कहते हैं |

Define cyclic group.

Ans. A group $(G,\ .)$ is called cyclic is for $a \in G$, every element $x \in G$ is of the form $a^{\,n}$, where n is some integer.

Symbolically, $G = \{a^n |\, n \in I\}$

The element a is called the generator of G.

10. चक्रीय समूह $(\{1, \omega, \omega^2\}, .)$ के जनक निम्न युग्म हैं ?

:- जनक युग्म हैं ω, ω^2

generators of the cyclic group $(\{1, \omega, \omega^2\}, .)$?

Ans. Generators ω, ω^2

11. H और K क्रमशः 6 और 8 कोटि के उपसमूह हैं | गुणन समूह में अवयवों की न्यूनतम संख्या होगी ?

:- न्यूनतम संख्या 12 होगी |

H and K are respectively subgroups of order 6 and 8. The least number of elements in the product HK set will be?
Ans. Least number of elements in the product HK set will be 12.

12. यदि G समूह के H, K परिमित उपसमूह हों तो $o(HK)$?
:- $(HK) = o(H)o(K)$.
If H, K are subgroups of the group G, then $o(HK)$ is?
Ans. $o(HK) = o(H)o(K)$.

13. G का H प्रसमान्य उपसमूह होगा यदि और केवल यदि सभी $g \in G$ के लिये gHg^{-1}?
:- $gHg^{-1} = H.$

H will be a normal subgroup of G if and only if for all $g \in G$ then gHg^{-1} will be?

Ans. $gHg^{-1} = H.$

14. निम्न में से किस कोटि का एक उपसमूह हमेशा एक निश्चित (प्रसमान्य) उपसमूह है |
:- 2
A subgroup is always an invariant (normal) subgroup if its order will be?
Ans. 2.

15. दर्शाइये की किसी आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसमान्य होता है |
:- मानलो G एक आबेली समूह है तथा H, G का एक उपसमूह है मान लो x, G का कोई अवयव है तथा h, H कोई अवयव है | अब

$$xhx^{-1} = xx^{-1}h \qquad [\ G \text{ आबेली है } x^{-1}h = hx^{-1}\ ]$$
$$= eh \qquad [\ xx^{-1} = e]$$
$$= h \in H$$
$$x \in G, \qquad h \in H \Rightarrow xhx^{-1} \in H.$$

Show that every subgroup of an abelian group is normal subgroup.
Ans. Let G be an abelian group and H is a subgroup of G. Let x be any element of G and h is any element of H. We have

$$xhx^{-1} = xx^{-1}h \qquad [\ G \text{ is abelian } x^{-1}h = hx^{-1}\ ]$$
$$= eh \qquad [\ xx^{-1} = e]$$
$$= h \in H$$

$$x \in G,\ h \in H \Rightarrow xhx^{-1} \in H.$$

16. यदि G एक समूह है तो समूह G/K परिभाषित होगा यदि :
:- K एक प्रसामान्य उपसमूह है |

If G is a group, then the group G/K will be defined if ?
Ans. K is a normal subgroup of G.

17. यदि N परिमित समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है , तो $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$.

:- परिभाषा से,

$o(G/N)$ = G में N के भिन्न भिन्न दक्षिण वाम सहसमुच्चयों की संख्या
= G में N का सूचक
= G में अवयवों की संख्या / N में अवयवों की संख्या
= $\frac{o(G)}{o(N)}$.

If N is a normal subgroup of a finite group G , then $o(G/N) = \frac{o(G)}{o(N)}$.
Ans. We have $o(G/N) =$ Number of distinct right (left) cosets of N in G
= The index of N in G.
= (Number of elements in G) / (Number of elements in N)
= $\frac{o(G)}{o(N)}$.

18. फलन तुल्याकारी होता है यदि:

:- एकैक, आच्छादक और समाकारी है |

The function $f: G \to G'$ is isomorphism if ?

Ans. f is one-one, onto and homomorphism.

19. समाकारिता पर प्रथम प्रमेय के कथन को लिखिए |

:- यदि f समूह G का समूह G' में एक अंतरक्षेपी समाकारिता है तो f का कर्नेल K, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है
State first theorem of homomorphism.
Ans. If f is a homomorphism of a group G into group G', then kernel K of f is a normal subgroup of G .

20. समूहों पर समाकारिता का मूलभूत प्रमेय के कथन को लिखिए |

:- मानलो G और G' दो समूह हैं तथा $f \ : \ G \to G'$, G का आच्छादक G' पर एक समाकारिता है यदि f का कर्नेल K है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{G}{K}$, G' से तुल्याकारी है |
State Fundamental Theorem on Homomorphism of Groups.
Ans. Let G and G' be the two groups and $f \ : \ G \to G'$, is a homomorphism of G onto G' . If K is the kernel of then prove that G/K is isomorphic to G'.

21. समाकारिता की अष्टि (कर्नेल) को समझाइए |

:- यदि प्रतिचित्रण f समूह G का समूह G' में समाकारिता है, तो G के उन अवयवों का समुच्चय K जो G' के तत्समक e' से आच्छादक प्रतिचित्रित होते हैं समाकारिता f की अष्टि (कर्नेल) कहलाता है |

Explain kernel of homomorphism.

Ans. If the mapping f of group G is a homomorphism in group G' , then the set K of all those elements of G which are mapped onto the identity e' of G' is called kernel of homomorphism.

22. क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ में प्रतिलोमन (inversions) ज्ञात कीजिए |

:- यहाँ $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1$.

युग्म अवयवों (1, 2) को लेने पर हम देखते हैं : $1 - 2 =$ ऋण तथा $3 - 2 =$ धन |

युग्म (1, 2)अनियमित है |

युग्म अवयवों (1, 3) को लेने पर हम देखते हैं : $1 - 3 =$ ऋण तथा $3 - 1 =$ धन |

युग्म (1, 3)अनियमित है |

युग्म अवयवों (2, 3) को लेने पर हम देखते हैं : $2 - 3 =$ ऋण तथा $2 - 1 =$ धन |

युग्म (2 , 3)अनियमित है |

(1, 2), (1, 3) और (2 , 3) के तीन प्रतिलोमन (inversions) हैं |

Find the inversions of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ans. Here $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1$.

Consider the pair (1, 2), we see that

$1 - 2 = -ve \quad 3 - 2 = +ve$, hence an inversion.

Consider the pair (1, 3), we see that

$1 - 3 = -ve \quad 3 - 1 = +ve$, hence an inversion.

Consider the pair (2, 3), we see that

$2 - 3 = -ve \quad 2 - 1 = +ve$, hence an inversion.

(1, 2), (1, 3) and (2 , 3) are three inversions.

23. यदि $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ और $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, तो fg ज्ञात कीजिए |

:- यहाँ, $$fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

If $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ and $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, then find fg.

Ans. Here we have $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

24. S_4 सममित समूह की कोटि क्या है |

:- 24.

What is the order of the symmetric group S_4 ?

Ans. 24 .

25. चक्रीय क्रमचय को परिभाषित कीजिए |

:- एक क्रमचय जो n बिम्ब (ऑब्जेक्ट्स) को चक्रतः (cyclically) प्रतिस्थापित करता है, एक चक्रीय क्रमचय कहलाता है |

Define cyclic permutation.

Ans. A permutation which replaces n objects cyclically is called a cyclic permutation or circular permutation.

26. मानलो G एक अन आबेली समूह है | दर्शाइए कि प्रतिचित्रण $f: G \rightarrow G$ जो निम्नाकित रूप से दिया जाता है : $f(x) = x^{-1}\ \forall\ x \epsilon G$. एक स्वकारिता नहीं है |

:- चूंकि G अन आबेली है, $\exists\ x, y \in G$ इस प्रकार है कि $xy \neq yx$

मानलो यदि संभव हो , $f\ (xy) = f\ (x)\ f(y\ )$, तब

$$(xy\ )^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$
$$(xy\ )^{-1} = (y\ x\ )^{-1}$$
$$(xy\ )^{(-1)^{-1}} = (yx\ \ )^{(-1)^{-1}}$$
$$xy = yx$$

जो की एक खंडन है, अतः f एक स्वकारिता नहीं है |

Let G be a non-abelian group. Show that the mapping $f: G \rightarrow G$ given by $f(x) = x^{-1}$ $\forall\ x \epsilon G$ is not an automorphism.

Ans. since G is non abelian, $\exists\ x, y \in G$ such that $xy \neq yx$

Suppose, if possible $f\ (xy) = f\ (x)\ f(y\ )$, then

$$(xy\ )^{-1} = x^{-1} y^{-1}$$
$$(xy\ )^{-1} = (y\ x\ )^{-1}$$
$$(xy\ )^{(-1)^{-1}} = (yx\ \ )^{(-1)^{-1}}$$

$$xy = yx$$

Which is a contradiction. Hence f is not an automorphism.

27. यदि $G = \{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 = e\}$ कोटि 5 का एक चक्रीय समूह है तब o(A(G)) है ?

:- 4

Let $G = \{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5 = e\}$ be a cyclic group of order 5, then o(A(G)) will be ?

Ans. 4.

28. एक क्रमविनिमेयि वलय R यूक्लिडीय वलय कहलाती है यदि प्रत्येक $a \in R$ के लिए एक ऋणेतर पूर्णांक $d(a)$ इस प्रकार परिभाषित हो की

(1) $d(a,b) \geq d(a)$ जब $a,\ b \neq 0$,

(2) प्रत्येक $a \in R$ तथा $b \neq 0 \in R$, के लिए $\exists\ q, r \in R$ इस प्रकार है की

$$a = bq + r, \quad r = 0 \text{ या } d(r) < d(b).$$

Define Euclidean ring.

Ans. A commutative ring R is said to be a Euclidean ring if for each $a \in R$ there is defined a non - negative integer $d(a)$ such that

(1) $d(a,b) \geq d(a)$ When $a,\ b \neq 0$,

(2) For each $a \in R$ and $b \neq 0 \in R$, $\exists\ q, r \in R$ such that

$a = bq + r$, where either $r = 0$ or $d(r) < d(b)$.

29. संरचना $(N, +, .)$ एक वलय होगी या नहीं ?

:- वलय नहीं होगी |

Structure $(N, +, .)$ will be a ring or not a ring ?

Ans. It is not a ring.

30. पूर्णांकों के वलय पर दो बहुपद

$$f(x) = 2 + 3x + 6x^2,$$

$$g(x) = 3 + 7x^2 - 9x^3. \text{ हों तो ज्ञात कीजिए: } f(x) + g(x).$$

:- $$f(x) = 2x^0 + 3x + 6x^2$$

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$g(x) = 3x^0 + 7x^2 - 9x^3.$$

$$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 0$$

$$b_0 = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 7,\ b_3 = -9 .$$

If there are two polynomials over ring of integers following as
$f(x) = 2 + 3x + 6x^2$, $g(x) = 3 - 2x + 7x^2 - 9x^3$. Then find $f(x) + g(x)$.
Ans. :- $f(x) = 2x^0 + 3x + 6x^2$

$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$g(x) = 3x^0 + 7x^2 - 9x^3$.

$g(x) = b_0 x^0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

$a_0 = 2,\ a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 0$

$b_0 = 3,\ b_1 = 0,\ b_2 = 7,\ b_3 = -9$.

31. यदि R एक वलय इस प्रकार है कि $a^2 = a \ \forall a \in R$, तो सिद्ध कीजिए कि :
$a + a = 0, \forall a \in R$, अर्थात R प्रत्येक अवयव स्वयं का योज्य प्रतिलोम है |

:- $a \in R \Rightarrow a + a \in R.$

$(a + a)^2 = (a + a)$, दिया है,

$\Rightarrow (a + a)(a + a) = (a + a)$

$(a + a)a + (a + a)a = a + a$ [वाम वितरण नियम]

$(a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) = a + a$ [दक्षिण वितरण नियम]

$(a + a) + (a + a) = a + a$ [$\therefore a^2 = a$]

$(a + a) + (a + a) = (a + a) + 0$ [$a + 0 = a$]

$(a + a) = 0$

If R is a ring such prove that $a + a = 0, \forall a \in R$ i.e each element of of R is its own additive inverse.

Ans. $a \in R \Rightarrow a + a \in R$.

Now $(a + a)^2 = (a + a)$, given

$\Rightarrow (a + a)(a + a) = (a + a)$

$(a + a)a + (a + a)a = a + a$ [left dis. law]

$(a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) = a + a$ [right dis. law]

$(a + a) + (a + a) = a + a$ [$\therefore a^2 = a$]

$(a + a) + (a + a) = (a + a) + 0$ [$a + 0 = a$]

$(a + a) = 0$

32. एकगुणान्कीय बहुपद को परिभासित कीजिए |

:- यदि वलय $(R, +, .)$ एक तत्समक अवयव रखता है, तो शूनयेतर बहुपद जिसकी कोटि n है तथा उसका अग्रक गुणक 1 है, एकगुणान्कीय बहुपद कहलाता है |

Define monic polynomial.

Ans. If the ring $(R, +, .)$ contains an identity element, then a non-zero polynomial with order n Nand leading coefficient 1 is called monic polynomial.

33. शून्य भाजक रहित एक परिमित क्रमविनिमय वलय एक पूर्णांकिय प्रांत है, कथन सत्य है या असत्य ?

:- कथन सत्य है |

A finite commutative ring without zero divisors is an integral domain, statement is true or false?

Ans. Statement is true.

34. यदि $a \neq 0 \in I$ जहां $(I, +, .)$ एक क्रमित पूर्णांकिय प्रांत है, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 > 0$.

:- चूंकि $a \neq 0$, तब त्रिविकल्पता नियम से या तो $a > 0$ या $-a > 0$ यदि $a > 0$, तब परिभाषा से $a^2 > 0$

यदि , $-a > 0$ तब परिभाषा से, $(-a)^2 > 0$

चूंकि $(-a)^2 = a^2$ अतएव $a^2 > 0$.

If $a \neq 0 \in I$ where $(I, +, .)$ is an integral domain, then prove that $a^2 > 0$.

Ans. Since $a \neq 0$, then by Trichotomy law, either $a > 0$ or if $-a > 0$,

$a > 0$, then by definition $a^2 > 0$

if, $-a > 0$, then by definition $(-a)^2 > 0$

Since $(-a)^2 = a^2$ therefore $a^2 > 0$.

35. अवशेष वर्ग क्षेत्र (mod 17) में ,5/7 = ?

:- 8.

In residue classes field (mod 17), 5/7 = ?

Ans. 8.

36. प्रत्येक परिमित पूर्णांकिय प्रांत क्षेत्र होता है, कथन सत्य है या असत्य ?

:- कथन सत्य है |

Every finite integral domain is a field, statement is true or false?

Ans. true.

37. सदिश समिष्ट R^4 में शून्य सदिश क्या है?

:- (0, 0, 0, 0).

What is zero vector in the vector space R^4 ?

Ans. (0, 0, 0, 0).

38. रैखितः परतंत्र सदिश को परिभाषित कीजिए |

:- मानलो $V(F)$ एक सदिश समष्टि है , V के सदिशों का एक परिमित समुच्चय $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ कहलाता है, यदि $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ अदिशों का अस्तित्व , जिनमें से सभी 0 नहीं हैं इस प्रकार है की

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = 0.$$

Define linearly dependent vectors.

Ans. Consider a vector space $V(F)$. Let $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ be a finite set of vectors $V(F)$. The set S is called linearly dependent if there exist scalars $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ not all of them zero such that $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = 0$.

39. दर्शाइए की सदिश (1,2), (3,4), R^2 के लिए आधार निर्मित करता हैं |

:- मानलो $a_1, a_2 \in R$ इस प्रकार हैं कि

$$a_1(1,2) + a_2(3,4) = 0$$

$$(a_1 + 3a_2,\ \ 2a_1 + 4a_2\ ) = (0, 0\ )$$

$$a_1 + 3a_2 = 0, \quad 2a_1 + 4a_2 = 0$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

अतः समुच्चय {(1,2), (3,4)} रैखिकतः स्वतंत्र हैं | 2, R^2 के लिए आधार होगा |

Show that the vectors (1,2), (3,4) form a bas is for R^2.

Ans. Let $a_1, a_2 \in R$ be such that $a_1(1,2) + a_2(3,4) = 0$

$$(a_1 + 3a_2,\ \ 2a_1 + 4a_2\ ) = (0, 0\ )$$

$$a_1 + 3a_2 = 0, \quad 2a_1 + 4a_2 = 0$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

Hence the set {(1,2), (3,4)} is linearly independent.

Again the dimension of vector space $R^2$is 2, and 2 is basis ofR^2.

40. एक परिमित सदिश समष्टि $V(F)$ के प्रत्येक उपसमष्टि W के लिए कथन $\dim W \leq \dim V$ सत्य होगा या असत्य ?

:- कथन सत्य होगा |

For each subspace W of a dimensional vector space, statement $\dim W \leq \dim V$ is true or not ?

Ans. True .

41. सदिश $\{\ \alpha, \beta\ \}$ को रैखिकतः स्वतंत्र कहते हैं यदि ?

The set of vectors α, β is called linearly independent if ?

42. सदिश समष्टियों के लिए विमीय प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए।

Write statement of dimension theorem for vector spaces.

43. सदिश समष्टि समाकारिता की अष्टि को समझाइए |

:- मानलो f एक सदिश समष्टि $U(F)$ से एक सदिश समष्टि $V(F)$ में एक समाकारिता है, तो f की अष्टि U, W के उन अवयवों को अंतर्विष्ट करने वाला U का एक उपसमुच्चय है , जो f के प्रति V के शून्य सदिश से आच्छादक प्रतिचित्रण करते हैं ,तो इसे ker (f) से निरूपित करते है |

प्रतीकात्मक रूप मे,

ker $(f) = \{\alpha \epsilon U : f(\alpha) = 0'$जहां $0', V$ का शून्य सदिश है$\}$.

$f(0) = 0'$ अतएव $\ker(f) \neq \phi$

Define kernel of a vector space homomorphism.

Ans. Let f be a homomorphism of a vector $U(F)$ into a vector space $V(F)$. Then the set of all those elements of U which are mapped into a $0'$of V is called the kernel of a vector space homomorphism and is denoted by ker (f) symbolically

ker $(f) = \{\alpha \epsilon U : f(\alpha) = 0'$where $0'$ is the zero vector of $V\}$.

Since $f(0) = 0'$, therefore, at least $0 \epsilon \ker(f)$. Hence $\ker(f) \neq \phi$.

44. प्रतिचित्रण $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 3,\ a_2 + 3),\ T : V_3(\mathrm{R}) \to V_2(\mathrm{R})$ एक रैखिक रूपांतरण होगा या नहीं दर्शाइए |

:- नहीं यह एक रैखिक रूपांतरण नहीं होगा |

Mapping $T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 3,\ a_2 + 3),\ T : V_3(\mathrm{R}) \to V_2(\mathrm{R})$ is a linear transformation or not ?

Ans. This is not a linear transformation.

45. माना f सदिश समष्टि $V(F)$ का एक रैखिक फलन है , तब दर्शाइए कि $f(\mathbf{0}) = 0$ जहां $\mathbf{0} \epsilon V$ and $0 \epsilon F$.

:- जैसा कि, f , रैखिक फलन है, अतः

$$\forall \ \alpha \epsilon V \Rightarrow f(\alpha) \epsilon F.$$

$$f(\alpha) + 0 = f(\alpha), \text{जहां } 0 \epsilon F$$

$$f(\alpha) + 0 = f(\alpha + \mathbf{0}) \qquad [\ \alpha + 0 = \alpha\ ]$$

$$f(\alpha) + 0 = f(\alpha) + f(0) \qquad [\ f \text{ रैखिक है}\ ]$$

$f\ (\mathbf{0}) = 0$ [F में योज्य के वाम निरसन नियम से]

Let f be a linear functional on a vector space $V(F)$ .Then show that

$f(\mathbf{0}) = 0$ where $\mathbf{0} \in V$ and $0 \in F$.

Ans. As f is a linear functional, we have

$\forall\ \ \alpha \in V \Rightarrow f\ (\alpha) \in F.$

$f\ (\alpha) + 0 = \ f\ (\alpha)$, where $0 \in F$

$f\ (\alpha) + 0 = f\ (\alpha + \mathbf{0})$ [$\alpha + 0 = \ \alpha$]

$f\ (\alpha) + 0 = \ f\ (\alpha) + f\ (0)$ [f is linear]

$f\ (\mathbf{0}) = 0$ [by left cancellation law for addition in F]

46. यदि $T : V_2 \rightarrow V_3$, एक रैखिक रूपांतरण है, जो की इस प्रकार परिभाषित है ,

$T(x_1, x_2) = \ (x_1,\ x_2 + x_2,\ x_2)$. जाति ज्ञात कीजिए |

:- हम जानते हैं की V_2 के लिए मानक आधार S = {(1,0), (0,1)}.

$R(T) = [\,T\ (1{,}0), T\ (0{,}1)]$.

$T\ (1{,}0\ ) = (1{,}1{,}0), T\ (0{,}1) = (0{,}1{,}1)$.

अतः दिए गए दोनों सदिश V_3 में रैखिकतः स्वतंत्र होंगे . यद्यपि इनमे से कोई भी किसी अन्य का अदिश गुणन नहीं है|

अतएव ये सदिश $R(T)$ के लिए आधार बनाते हैं |

अतः

T की जाति = ρ (T) = 2.

Let a linear transformation $T : V_2 \rightarrow V_3$ be defined by $T(x_1, x_2) = \ (x_1,\ x_2 + x_2,\ x_2)$. Find rank.

Ans. We know that the standard basis for V_2 is S = {(1,0), (0,1)}. $R(T) = [\,T\ (1{,}0), T\ (0{,}1)]$.

$T\ (1{,}0\ ) = (1{,}1{,}0), T\ (0{,}1) = (0{,}1{,}1)$.

Clearly these two vectors are L.I. in V_3. Since neither of them is a scalar multiple of other.

So, these vectors will form a basis for $R(T)$. Hence

Rank of T = ρ (T) = 2.

47. यदि प्रतिचित्रण $f : V_1 \rightarrow V_2$ एक ऐकैक आच्छादक और एक रैखिक रूपांतरण है, तब $f^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$, होगा ?

48.:- रैखिक होगा |

If $f : V_1 \rightarrow V_2$ is one-one onto and linear transformation, then $f^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$ is ?

Ans. Linear.

49. n-विमीय सदिश समष्टि का द्वैत क्या होगा ?

:- n- विमीय सदिश समष्टि होगा |

The dual of n- dimensional vector space is?

Ans. n-dimensional vector space.

50.आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानो को ज्ञात कीजिए |

:- आव्यूह A का अभिलक्षणिक समीकरण होगा,

$$|A - \lambda I| = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 6$

अतः आव्यूह A के आइगेन मान $1, 6$ होंगे |

Find eigen value of the matrix, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Ans. characteristic equation of the matrix A

$$|A - \lambda I| = 0,$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, 6$

Hence eigen values of the matrix A are 1,6.

Short answer type questions:

1. ब्रह्मगुप्त की संक्षिप्त जीवनी लिखिए |

   Write a brief biography of Brahmagupta.

2. यदि a का प्रतिलोम a^{-1}है तो a^{-1} , का प्रतिलोम है a अर्थात $((a)^{-1})^{-1} = a.$

   If the inverse of an element 'a' in a group is a^{-1}, then the inverse of a^{-1}, is a, i.e., $((a)^{-1})^{-1} = a$.

3. यदि H और K समूह G के कॉम्प्लेक्स हैं तो $(HK)^{-1} = K^{-1} H^{-1}$.

   If H and K are any complexes of a group G, then

$$(HK)^{-1} = K^{-1} H^{-1}.$$

4. प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है |
   Every cyclic group is an abelian group.

5. यदि n एक धन पूर्णांक है तथा a कोई पूर्णांक n है के सापेक्षतः अभाज्य है, तो
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n\ )$$
   जहां ϕ आयलर फलन है |

   If n is a positive integer and a is any integer relatively prime to n, then
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n\ )$$
   Where ϕ is the Euler ϕ -function.

6. फार्मा प्रमेय के कथन को लिखिए ।
   Prove Fermat's theorem.

7. यदि H, G का उपसमूह है और N, G का प्रसमान्य उपसमूह है , तो दिखाईये कि $H \cap N$, H का प्रसमान्य उपसमूह होगा |
   If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G , then show that $H \cap N$ is a normal subgroup of H.

8. विभाग समूह को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए |
   Define Quotient group and give an example.

9. समूह की समाकारिता को समझाइए |
   Define homomorphism of a groups.

10. यदि $f : G \rightarrow G'$ समूहों की समाकारिता है , तथा $f(e) = e'$ जहां e और e'क्रमशः G और G' के तत्समक अवयव है.
    If $f : G \rightarrow G'$ is a homomorphism of groups, then $f(e) = e'$, where e and e' are the identities of G and G' respectively.

11. मानलो f समूह G का समूह G' मे अन्तरक्षेपी समाकारिता है | मानलो $f(G), G$ का G' में समाकारी प्रतिबिंब है, तो सिद्ध कीजिए कि $f(G)$, G' का एक उपसमूह है |
    Let f be a homomorphism of group G in group G'. Let $f(G)$ be homomorphic image of G in G' then prove that $f(G\ )$ is a subgroup of G'.

12. क्रमचय $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए |

Find the inverse of the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$.

13. मानलो G एक समूह है तथा मान लो g, G का एक स्थिर अवयव है तब प्रतिचित्रण $T_g\colon G \to G$ जो

$$T_g\,(x) = g\,x\,g^{-1} \quad \forall\, x \in G.$$

से परिभाषित है, G का एक स्वाकारिता है |

Let G be a group and let g be a fixed element of G. Then the mapping $T_g\colon G \to G$ defined by

is an automorphism of G.

14. सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों का समुच्चय I साधारण योग और गुणन के सापेक्ष, अर्थात $(I, +, \ .)$) एक पूर्णांकिय प्रांत है |

Prove that the set of integers I with respect to ordinary addition and multiplication; i.e. $(I, +, \ .)$ is an integral domain.

15. सिद्ध कीजिए की क्षेत्र $(F, +, \ .)$ में $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}, \ a, b \in F, b \neq 0, a \neq 0$

In a field $(F, +, \ .)$ prove that

$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}, \ a, b \in F, b \neq 0, a \neq 0.$

16. सदिश समिष्ठ को परिभाषित कीजिए |

Define vector space.

17. मान लो $V(F)$ एक सदिश समिष्ठ है, $0, V$ का शून्य सदिश (zero vector) है $0, F$ का शून्य अदिश (zero scalar) है | तब : $a\,(-\alpha) = -(a\,\alpha) \quad \forall\, a \in F, \forall\, \alpha \in V$.

Let $V(F)$ be a vector space, 0 be the zero vector V and 0 be the zero scalar of V. Then: $a\,(-\alpha) = -(a\,\alpha) \quad \forall\, a \in F, \forall\, \alpha \in V$.

18. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W = \{(a, b, 0) \colon a, b \in F\}$, $V_3(F)$ की एक सदिश उपसमिष्ठ (vector subspace) है |

Show that the set $W = \{(a, b, 0) \colon a, b \in F\}$, $V_3(F)$ is a vector subspace of $V_3(F)$.

19. यदि W_1और W_2सदिश समिष्ठ की उपसमिष्ठयां हैं तब : $W_1 + W_2$, $V(F)$ की उपसमिष्ठ हैं |

If W_1 and W_2 are subspaces of the vector space $V(F)$, then

(i) $W_1 + W_2$ is a subspace of $V(F)$.

20. सिद्ध कीजिए कि सदिश समिष्ठ$V_3(R)$ में चार सदिशों $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,0,0), \alpha_3 = (0,1,\ 0)$ और $\alpha_4 = (0,0,1)$ का निकाय रैखिकतः परतंत्र है |

Prove that the four vectors $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,0,0), \alpha_3 = (0,1,\ 0)$ and $\alpha_4 = (0,0,1)$ in $V_3(R)$ form a linearly dependent set.

21. $V_3(R)$ के समुच्चय $S = (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0), (1,\ 0,\ 0)$ के सापेक्ष α का निर्देशांक सदिश ज्ञात कीजिए , जहां $\alpha = (4,-3,2)$,

Find the co-ordinate vector of relative to the basis set

$S = (1,\ 1,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0), (1,\ 0,\ 0)$ of $V_3(R)$ where $\alpha = (4,-3,2)$.

22. किसी समाकारिता की अष्टि (कर्नेल) सदिश समिष्ठ $U(F)$ की एक सदिश उपसमिष्ठ होती है |

The kernel of a homomorphism is a subspace of $U(F)$.

23. दर्शाइए की रूपांतरण $T:\ V_2(R) \to V_3(R)$ जो परिभाषित है:

$T(a,b) = (a+b,\ a-b,\ b)\ \forall\, a\,, b\ \in\ R$ $V_2(R)$ से $V_3(R)$ में एक रैखिक रूपांतरण है |

Show that the transformation $T:\ V_2(R) \to V_3(R)$ be defined by $T(a,b) = (a+b,\ a-b,\ b)$ is a linear transformation from $V_2(R)$ into $V_3(R)$.

24. आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात कीजिए |

Determine the eigen values of the matrix $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

25. आव्यूह $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ का अभिलक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिए |

Find characteristic equation of matrix, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Long answer type questions :

1. भारत के संदर्भ में बीजगणित की एतिहासिक प....भूमि की चर्चा कीजिए |

Discuss historical background of the algebra in the context of India.

2. मानलो Q_+ सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और '*'Q_+ पर द्विचर संक्रिया है जी निम्न प्रकार से परिभाषित है : $a * b = \frac{ab}{3}$, $a, b \in Q_+$

दर्शाइए की$(Q_+,*)$ का एक आबेली समूह है |

Let be the set of all positive rational numbers and is a binary operation on defined as $a * b = \frac{ab}{3}$, $a, b \in Q_+$.

Show that$(Q_+,*)$ is a commutative (abelian) group.

3. यदि H_1और H_2 समूह G के दो उपसमूह हैं , तब $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होता है |

Let $H_1$and H_2 are two subgroups of a group G then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of G.

4. एक चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है |

Every subgroup of a cyclic group is cyclic.

5. किसी उपसमूह के दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय या तो विसंघीय या सर्वसम होते हैं |

Any two right (left) cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

6. किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का भाजक होता है |

The order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

7. किसी समूह का G एक उपसमूह H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चयों का गुणनफल पुनः G में एक दक्षिण सहसमुच्चय है|

A subgroup H of a group G is a normal subgroup of G if and only if the product of two right cosets of H in G is again a right coset of H in G.

8. किसी समूह के दो प्रसामान्य समूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है |

The intersection of a two normal sub groups of a group is a normal subgroup.

9. एक अनंत चक्रीय समूह पूर्णांकों के योज्य समूह से तुल्याकारी होता है |

An infinite cyclic group is isomorphic to the additive group of integers.

10. समूहों पर समाकारिता की मूलभूत प्रमेय लिखिए और सिद्ध कीजिए |

State and prove the fundamental theorem of homomorphism of a groups.

11. n प्रतीकों पर n ! क्रमचयों में (½) n! सम क्रमचय और (½) n! विषम क्रमचय होते हैं |

Of the n! permutations on n symbols, (½) n! are even permutations and (½) n! odd permutations.

12.कैली प्रमेय का कथन तथा सत्यापन कीजिए |
State and prove Cayley's theorem.

13.किसी समूह G के सभी स्वकारिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन को संयोजन के रूप में लेने के सापेक्ष एक समूह होता है |
The set of all automorphisms of a group G forms a group with respect to composition of mapping as the composition.

14. सिद्ध कीजिए की एक अनंत चक्रीय समूह के स्वकारिताओं के समूह की कोटि 2 है |
Prove that the group of automorphism of an infinite cyclic group is of order 2.

15. एक वलय R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम सत्य है |
A ring R is without zero divisors if and only if the cancellation laws hold in R.

16. समिश्र संख्याओं का समुच्चय क्रमित पूर्णांकिय प्रांत नहीं है |
The set of all complex numbers is not an ordered integral domain.

17. प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः एक पूर्णांकिय प्रांत होता है |
Every finite integral domain is a field.

18. सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अतिरिक्त उपसमुच्चय W को V का उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं प्रतिबंध है :

$$a\,,\ b\ \in\ F \text{ तथा } \alpha,\ \beta\ \in\ W \Rightarrow\ a\,\alpha +\ b\,\beta \in\ W.$$

The necessary and sufficient condition for a non- empty subset W of a vector space $V(F)$ to be a vector subspace of V is

$$a\,,\ b\ \in\ F \text{ and } \alpha,\ \beta\ \in\ W \Rightarrow\ a\,\alpha +\ b\,\beta \in\ W.$$

19. परिमित विमीय सदिश समष्टि के लिए अस्तित्व प्रमेय का कथं लिखिए और सिद्ध कीजिए |
State and prove existence theorem for finite dimensional vector space.

20. यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है , तब

$$dim\frac{V}{W} = \dim V - \dim W.$$

If W be a sub space of a finite dimensional vector space $V(F)$ then

$$dim\frac{V}{W} = \dim V - \dim W.$$

21.माना कि R^3 पर T एक रैखिक संकारक है , जो

$T(x_{1,}\ x_2,\ x_3) = (x_1\ + x_2 + x_3,\ - x_1 -\ x_2 - 4x_3,\ \ 2x_1 -\ x_3)$

से परिभाषित है | आधार $B = \ (\alpha_{1,}\ \alpha_2,\ \alpha_3),$ जहां

$\alpha_1\ \ = (1,1,1),\ \alpha_2 = (0,1,1),\ \ \ \alpha_3 = (1,0,1)$?

हैं T के सापेक्ष का आव्यूह ज्ञात कीजिए |

Let T be the linear operator on R^3 defined by

$T(x_{1,}\ x_2,\ x_3) = (x_1\ + x_2 + x_3,\ - x_1 -\ x_2 - 4x_3,\ \ 2x_1 -\ x_3)$

What is the matrix of T in the ordered basis $B = \ (\alpha_{1,}\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, where

$\alpha_1\ \ = (1,1,1),\ \alpha_2 = (0,1,1),\ \ \ \alpha_3 = (1,0,1)$?

22. कोटि – शून्यता प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए |

State and prove “Rank - Nullity theorem”.

23.आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए |

Determine the eigen values and corresponding eigen vectors of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

24. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ के आइगेन समीकरण को ज्ञात कीजिए और सत्यापित कीजिए की यह A द्वारा संतुष्ट होता है औरA^{-1} भी ज्ञात कीजिए |

Find the characteristic equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ and verify that it is satisfied by A and hence obtain A^{-1}.

25. दर्शाइए की निम्न आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ विकर्णीय है |

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is diagonalizable.

GOVT DR SHYAMA PRASAD MUKHERJEE SCIENCE & COMMERCE COLLEGE, KOLAR ROAD BHOPAL

CLASS- B. Sc. II YEAR

Paper – II, Advanced Calculus & Partial Differential Equations

Very Short Questions (with Answer)

Unit –I

Q.1 If $\boldsymbol{a \neq 0}$ and $\boldsymbol{b}$ are two elements of R such that $\boldsymbol{a.b = 1}$, then $\boldsymbol{b = a^{-1}}$

Solution: Given that $a \neq 0$ and $b \in R$ such that $a.b = 1$
Then $a.b = 1 \Rightarrow a^{-1}.(a.b) = a^{-1}.1$ [since $a \in R \Rightarrow a^{-1} \in R$]
$\Rightarrow (a^{-1}.a).b = a^{-1}$, by associative law
$\Rightarrow 1.b = a^{-1}$ [since $a^{-1}.a = 1 \in R$]
$\Rightarrow b = a^{-1}$ [since $1.b = b \in R$]

Q.2 If $\boldsymbol{a \neq 0}$ and $\boldsymbol{b, c}$ are two elements of R such that $\boldsymbol{a.b = a.c}$ then $\boldsymbol{b = c}$

Solution: Given that $a \neq 0$ and then the inverse of a i.e. $a^{-1} \in R$
$a.b = a.c \Rightarrow a^{-1}.(a.b) = a^{-1}(a.c)$
$\Rightarrow (a^{-1}.a).b = (a^{-1}.a).c$ by associative law
$\Rightarrow 1.b = 1.c$ [since $a^{-1}.a = 1 \in R$]
$\Rightarrow b = c$ [since $1.a = a \in R$]

Q.3 If $\boldsymbol{x, y, z \in R}$, then prove that $\boldsymbol{|x + y| \leq |x| + |y|}$

Solution: we know that $x \leq |x|$ and $y \leq |y|$ and $-x \leq |x|$ and $-y \leq |y|$
So $x + y \leq |x| + |y|$ …(1) and $(-x) + (-y) \leq |x| + |y|$
$\Rightarrow -(x + y) \leq |x| + |y|$ …(2)
From (1) and (2), we have
Max $\{ x + y, -(x + y)\} \leq |x| + |y|$
Hence
$\boldsymbol{|x + y| \leq |x| + |y|}$, by theorem for each $x \in R$, $|x| = \max\{x, -x\}$

Q.4 If $\boldsymbol{x \in R}$, show that $\boldsymbol{|x| = \sqrt{x^2}}$

Solution: Given that $x \in R$
So if $x \geq 0$ then $|x| = x = \sqrt{x^2}$
and if $x < 0$ then $|x| = -x = \sqrt{x^2}$
Hence $|x| = \sqrt{x^2}$

Q.5 Show that the set of all positive real number $\boldsymbol{R^+}$, is bounded below and unbounded above.

Solution: Since every member of $R^- \cup \{0\}$ is lower bound of R^+
Therefore R^+ is bounded below.
Now we prove R^+ is bounded above, if possible, suppose u is an upper bound of R^+
We have $u \geq 1$, for $\mathbf{1} \in R^+$.
Since $\mathbf{2} \in R^+$, $\mathbf{2} > 0$ and so $u \geq 1$, $\mathbf{2} > 0 \Rightarrow u + 2 > 1 + 0$
$\Rightarrow u + 1 > 0$

$$\Rightarrow u + 1 \in R^+$$

But $u + 1 > u$, This contradiction that u is upper bound of R^+.
Hence R^+ is unbounded above.

Q.6 Give an example of a set which is not complete ordered field.

Solution: The set of rational number Q is not complete ordered field.

Q.7 If $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are two elements of R, then $(-\boldsymbol{a}).(-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}$

Solution: $(-a).(-b) = (-a).(-b) + 0 = (-a).(-b) + [(-ab) + ab]$

$$= [(-a).(-b) + (-ab)] + ab$$
$$= [(-a).(-b) + (-a).b] + ab$$
$$= (-a).[(-b) + b] + ab$$
$$= (-a).0 + ab = 0 + ab$$
$$= ab$$

Q.8 Define Least Upper Bound and Greatest Lower Bound.

Q.9 If $\boldsymbol{S}$ be a singleton set. What are the supremum and infimum of $\boldsymbol{S}$.

Solution: A singleton set is a finite and closed
Every finite set contain its supremum and infimum
If $S = \{a\}$ i.e. a singleton set
Then supremum = a
and infimum = a

Q.10 Between any two distinct real numbers there lies at least one irrational number.

Solution: We know by the Density Theorem **"**Between any two different real numbers, there lies at least one rational number**".**
So applying the Density Theorem to the real numbers $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$, we obtain a rational number $r \neq 0$ such that $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow x < r\sqrt{2} < y$

$\Rightarrow x < z < y$, where $r\sqrt{2}$ is irrational number.

Unit – II

Q.1 Every convergent real sequence is Cauchy sequence.

Solution: Let the sequence of real number $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to l. Then for any $\epsilon > 0$, there exists $m \in N$ such that

$|S_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$, $(n \geq p)$ ....(1)

Thus if $n, m \geq p$, we have from (1)

$$|S_n - S_m| = |S_n - l + l - S_m|$$
$$\leq |S_n - l| + |l - S_m|$$
$$\leq |S_n - l| + |S_m - l|$$
$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

i.e. $|S_n - S_m| < \epsilon$ $(n, m \geq p)$
Hence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is Cauchy's sequence.

Q.2 Prove that the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, where $S_n = (-1)^n$, has no limit.

Solution: Suppose on the contrary, l is the limit of the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$

Then for $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists\ m \in N$ such that

$|S_n - l| < \epsilon \quad n \geq m$

$|(-1)^n - l| < \frac{1}{2} \quad n \geq m$ …… (1)

If n is even then from (1), we have

$|1 - l| < \frac{1}{2}$ …… (2)

If n is odd then from (1), we have

$|-1 - l| < \frac{1}{2}$

$|1 + l| < \frac{1}{2}$ ……. (3)

Now adding (2) and (3), we have

$2 = |2| = |1 - l + 1 + l| \leq |1 - l| + |1 + l| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$,

since $|x + y| \leq |x| + |y|$

which is condradiction.

Hence $(-1)^n$ has no limit.

Q.3 Show that the sequence ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^n} \ldots$) is convergent.

Solution: Suppose that $S_n = \frac{1}{2^n}$, then $S_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$ for all $n \in N$

So $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{1}{2^{n+1}} < 0$ for all $n \in N$

Therefore $S_{n+1} - S_n < 0$ for all $n \in N$

i.e. $S_{n+1} < S_n$ for all $n \in N$

Hence $\{S_n\}$ is monotonic decreasing sequence.

Again

$0 < \frac{1}{2^n} < 1$ for all $n \in N$

So $0 < S_n < 1$ for all $n \in N$

Thus the sequence $\{S_n\}$ is bounded.

Now since ($\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots$) is bounded and monotonic sequence, Hence sequence it is convergent.

Q.4 Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}}\right] = 1$

Solution: Suppose that $S_n = n^{\frac{1}{n}}$ for all $n \in N$

Then $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Hence by Cauchy's first theorem on limit, we have

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$

Therefore $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_3}{n} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}} + \cdots + n^{\frac{1}{n}}\right] = 1$$

Q.5 Test of convergence of the following series $\frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \ldots$

Solution: Suppose that $\sum u_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{5}{3.4.5} + \ldots$

So that $u_n = \frac{2n-1}{n\,(n+1)(n+2)}$

$v_n = \frac{n}{n.n.n} = \frac{1}{n^2}$, where v_n is the nth term of the auxiliary series $\sum u_n$

$\frac{u_n}{v_n} = \frac{2n-1}{n\,(n+1)(n+2)}.\frac{n^2}{1} = \frac{(2n-1)n}{(n+1)(n+2)} = \frac{(2-\frac{1}{n})}{\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+\frac{2}{n})}$

So $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 2$, which is a finit non-zero number.

Thus camparison test can be applied. Now by p-series test, the auxiliary series $\sum \frac{1}{n^2}$ is convergent,as p = 2 (>1).

Hence by comparison test the given series is convergent.

Q.6 Prove that $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n!^{\frac{1}{n}}} = e$

Solution: Let $a_n = \frac{n^n}{n!}$ then $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

So $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n}$

$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Hence by Cauchy's second theorem on limits,

$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$

Hence $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n!^{\frac{1}{n}}} = e$

Q.7 For Lagrange's mean value theorem, the value of ξ if the function $f(x) = x^2$ in the interval [-2, 3] is.

Solution: $\pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

Q.8 Show that the derivative of an even function is always an odd function.

Solution: Let the function $f(x)$ be an even function of x, then by definition of even function, we have

$$f(x) = f(x)$$

Differentiating both sides with respect to x, we have

$$f'(-x)\frac{d}{dx}(-x) = f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(-x).(-1) = f'(x)$$
$$\Rightarrow f'(-x) = -f'(x)$$

Thus $f'(x)$ is an odd function of x.

Q.9 Show that $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on [-1, 1].

Solution: Given that $f(x) = x^2$

Let $x, y \in [-1, 1]$ then

$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)|$

$\leq |x - y|(|x| + |y|)$

$\leq 2|x - y|,$ since $x, y \in [-1, 1] \Rightarrow |x| \leq 1, |y| \leq 1$

$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$ ...(1)

Let $\epsilon > 0$. Choose $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ then for $|x - y| < \delta$, we have

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

i.e.

$|f(x) - f(y)| < \epsilon, \ |x - y| < \delta \quad x, y \in [-1, 1]$.

Hence $f(x) = x^2$ is uniformly continuous on [-1, 1].

Q.10 The function $f(x) = sinx, x \in R$ is differentiable on R or not differentiable on R

Solution: Differentiable on R.

Unit –III

Q.1 The value of $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + 2y)$ is

Solution: 5

Q.2 If $u = xy\, sin\frac{y}{x},\ then\ the\ value\ of\ x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ is

Solution: 2 u

Q.3 The degree of homogeneous function $f(x, y) = \ sin^{-1}(\frac{x}{y})$ is

Solution: Zero

Q.4 If V is a function of two variables x and y and $x = r\ cos\theta$ then the value of $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ is

Solution: $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}$

Q.5 If $u^3 + v^3 = x + y$ and $u^2 + v^2 = \ x^3 + y^3$, then the value of $J(\ u, v)$ is

Solution: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{y^2 - x^2}{2uv(u-v)}$

Q.6 $x = r\ cos\theta, y = r\ sin\ \theta$ then the value of $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ and $\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)}$ is

Solution: $\frac{1}{r}$

Q.7 The saddle point of the function $x^2 + xy + 3x + 2y + 5$ is

Solution: (-2, 1)

Q.8 The critical point of the function $u = x^3 - y^3 - 3x$ are

Solution: (1, 0), (-1, 0)

Q.9 The value of $\Gamma(\frac{1}{2})$ is

Solution: $\sqrt{\pi}$

Q.10 The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{sinx}} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sinx}\, dx$ is

Solution: π

Unit - 4

Q.1 Find the partial differential equation by the elimination of a and b from $z = ax + by + ab$.

Solution: Given that $z = ax + by + ab$ …(1)

Differentiating partially (1), with respect to x and y, we have

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = a \qquad \text{…(2)}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = b \qquad \text{…(3)}$$

Eliminating a and b from (1) using (2) and (3), we have

$$z = px + qy + pq$$

Which is required partial differential equation.

Q.2 Obtain partial differential equation by the eliminating the arbitrary function f:

$$z = f(x + ay)$$

Solution: Given that $z = f(x + ay)$

Differentiating partially with respect to x and y, we have

$p = \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x + ay).1$ …(1)

and $q = \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x + ay).a$

$\frac{q}{a} = \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x + ay)$ …(2)

Eliminating arbitrary function from (1) and (2), we have

$$p = \frac{q}{a}$$

$ap = q.$

Q.3 If $z = f(x + ay) + \varphi(x - ay)$, then prove that $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Solution: Given that $z = f(x + ay) + \varphi(x - ay)$ …(1)

Differentiating partially (1) with respect to x, we have

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x + ay) + \boldsymbol{\varphi}'(x - ay)$$

Again Differentiating partially w.r.to x, we have

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x + ay) + \varphi''(x - ay)$ …(2)

Now, Differentiating partially (1) with respect to y, we have

$$\frac{\partial z}{\partial y} = af'(x + ay) - a\,\boldsymbol{\varphi}'(x - ay)$$

Again Differentiating partially w.r.to y, we have

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 f''(x + ay) + a^2\,\varphi''(x - ay)$

$= a^2[f''(x + ay) + \varphi''(x - ay)]$ …(3)

$= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, by using (2)

Hence proved $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Q.4 Solve $xzp + yzq = xy$

Solution: Given that $xzp + yzq = xy$ …(1)

Comparing (1) with the standard form $Pp + Qq = R$, we have

$P = xz, Q = yz$ and $R = xy$

So the Lagrange's auxiliary equations for (1) are

$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$

$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$ …(2)

Taking first two fractions of (2), we have

$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

Integrating, we have $\frac{x}{y} = c_1$

Again taking second and last fractions of (2), we have

$\frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x} \Rightarrow \frac{dy}{z} = \frac{dz}{yc_1} \Rightarrow yc_1dy - zdz = 0$

Integrating, we have

$c_1y^2 - z^2 = c_2 \Rightarrow \frac{x}{y}.y^2 - z^2 = c_2 \Rightarrow \frac{x}{y}.y^2 - z^2 = c_2 \Rightarrow xy - z^2 = c_2$

Hence general solution is $\varphi\left(\frac{x}{y}, xy - z^2\right) = 0$

Which φ is an arbitrary function.

Q.5 The differential equation $pq = 1$ is

Solution: Of the first form and has a singular solution.

Q.6 The differential equation $pq = xy$ is

Solution: Of the third form and has no singular solution.

Q.7 The general method of solving first order non-linear partial differential equation $\boldsymbol{f(x, y, z, p, q) = 0}$

Solution: Charpit's method.

Q.8 Charpit's auxiliary equations for the differential equation $\boldsymbol{2zx - p}x^2 - 2qxy + pq = 0$ is

Solution: $\frac{dx}{2xy-p} = \frac{dy}{y^2-q} = \frac{dx}{px^2+2xyq}$

Q.9 Solve $\boldsymbol{log\ s = x + y}$

Solution: Given equation $log\ s = x + y$

The given equation can be written as $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x+y}$

Integrating w.r.to x, we have

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} + f(y)$

Again Integrating w.r.to y, we have

$z = e^{x+y} + \int f(y)\, dy + F(x)$ or $z = e^{x+y} + \varphi(y) + F(x)$

Which is required complete solution.

Q.10 Find complete integral of $p^2 + q^2 = x + y$

Solution: Firstly we separate p and x from q and y, so we have

$$p^2 - x = y - q^2$$

Putting

$$p^2 - x = a \text{ and } y - q^2 = a$$

$p = \sqrt{x + a}$ and $q = \sqrt{y - a}$

Putting these values of p and q in $dz = pdx + qdy$, we have

$dz = \sqrt{x+a}\,dx + \sqrt{y-a}\,dy$
Integrating
$z + b = \frac{2}{3}(x+a)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(y-a)^{\frac{2}{3}}$
Which is required complete solution.

Unit – V

Q.1 Nature of the partial differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ is

Solution: Hyperbola.

Q.2 Solution of the differential equation $r = 2y^2$ is
Solution: $z = x^2y^2 + xf(y) + F(y)$

Q.3 Partial differential equation $x^2r - y^2t = xp - yp$ is
Solution: Of second order and liear.

Q.4 Equation $r^2 + 2s - t^2 = 0$ is of order
Solution: Two.

Q.5 The partial differential Equation of second order can be expressed as
Solution: $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$

Q.6 Auxiliary equation of $r + a^2t = 0$ is
Solution: $m^2 + a^2 = 0$

Q.7 Particular Integral of the differential equation $(D^2 - a^2D'^2)z = x$ is
Solution: $\frac{x^3}{6}$

Q.8 Complementary function of the equation $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ is

Solution: $\varphi\ (y + x)$

Q.9 Subsidiary equation of $2r + 5x + 2t = 0$ is
Solution: $2m^2 + 5m + 2 = 0$

Q.10 The general solution of the differential equation $D^2 - 2DD' + D'^2)z = 0$ is
Solution: $z = \varphi_1(x + y) + x\varphi_2(x + y)$

Short Answer Type Question

Unit - I

Q.1 Write a short note on Bodhayana's finding in calculus.

Q.2 Show that $\sqrt{8}$ is not rational number.

OR

Prove that there exists no rational number whose square is 8.

Q.3 If a and b are two rational numbers such that $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, is a rational number, then prove that $\sqrt{ab}$ is also a rational number.

Q.4 Define absolute value and prove that for each $x \in R, |x| = \max\{x, -x\}$.

Q.5 Between any two distinct rational numbers there lies at least one rational number.

Unit – II

Q.1 Define Cauchy Sequence Prove that every Cauchy's sequence is bounded but the converse is not true.

Q.2 Test of convergence and divergence of the following series $(\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+\ ..., x > 0)$

Q.3 If $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ when $x \neq 0$ and $f(0) = 0$. Show that $f(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 0$.

Q.4 Write the statement of Rolle's theorem and verify Rolle's theorem for the functions:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Q.5 State and prove Lagrange's first mean value theorem**.**

Unit – III

Q.1 Define continuity of a function of two variable and examine the continuity of $f(x, y)$ given below at the point (0, 0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Q.2 Transform the equation $(1+x^2)^2 + \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = 0$ putting $x = tanz$

Q.3 If $x^x y^y z^z = c$, then show that $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x\ logex)^{-1}$, when $x = y = z$

Q.4 Show that $\beta(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma mn}, (m,n > 0)$.

Q.5 Find the minimum value of the function $u = x^2 + y^2 + z^2$ having given that $ax + by + cz = p$.

Unit - IV

Q.1 From a partial differential equation by eliminating a, b, c from $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Q.2 Solve $(y + z)p + (z + x)q = x + y$.

Q.3 Solve $p\ (1 + \ q^2) = q(z - a)$.

Q.4 Find the complete integral $z\ (p^2 - q^2)\ = x - y$.

Q.5 Solve $p + r + s = 1$.

Unit - V

Q.1 Explain the classification of linear partial differential equation of second order.

Q.2 Solve $(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$.

Q.3 Find the general solution of the differential equation $(D^3 - 4D^2D' + 4DD'^2)z = 4\sin(2x + y)$.

Q.4 Solve $(D^2 - DD' - 2D'^2)z = (y - 1)e^x$.

Q.5 Solve $(D^2 + DD' + D' - 1)z = \sin\ (x + 2y)$.

Long Answer Type Question

Unit – I

Q.1 Discuss historical background of the calculus and partial differential equations in the context of India.

Q.2 Prove that there exists no integer for which $\sqrt{r+1} + \sqrt{r-1}$ is a rational number.

Q.3 The set of rational numbers Q is not order- complete.

Q.4 State and prove Archimedean property in R.

Q.5 State and Prove Density theorem for real number.

Unit –II

Q.1 State and prove Cauchy's first theorem on limit.

OR

If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real numbers and $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

then $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = l$.

Q.2 Test of convergence of the following series $\frac{x}{1}+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7}+\ ...$

Q.3 Define Every Absolute Convergence and prove that every absolutely convergent series is convergent but not conversely.

Q.4 State and prove mean value theorem for a function of two variables.

Q.5 If $f(x) = x^2 sin\frac{1}{x}$ for $x \neq 0$ and $f(0) = 0.$ Show that $f(x)$ is continuous and differentiable everywhere and $f'(0) = 0.$ Show that f' has a discontinuity of second kind at the origin.

Unit – III

Q.1 If $u = (1-2xy+y^2)^{-\frac{1}{2}}$, then prove that $\frac{\partial}{\partial x}\left\{(1-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{y^2\frac{\partial u}{\partial y}\right\} = 0.$

Q.2 If $u = f(x, y)$ where $x = r\ cos\ \theta$ and $y = r\ sin\ \theta$ prove that the equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ transforms into $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$

Q.3 Write the statement of Taylor's theorem for a function of two variables and expand $f(x,y) = x^2y+3y-2$ in power of $(x-1)$ and $(y+2)$.

Q.4 Find maxima and minima of the function $u = sinx + siny + \sin(x+y).$

Q.5 State and prove that Legendre's duplication formula.

Unit – IV

Q.1 Solve $x^2p^2+y^2q^2 = z^2.$

Q.2 Solve $z^2(p^2+q^2) = x^2+y^2.$

Q.3 Solve the Charpit's method $(p^2+q^2)y = qz.$

Q.4 Solve the Charpit's method $z = px+qy+p^2+q^2.$

Q.5 Solve the Charpit's method $q = px+p^2.$

Unit – V

Q.1 Classify and solve the equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Q.2 Classify the following Partial differential equation and reduce to canonical form $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

Q.3 Find the general solution of the differential equation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = cosmx\sin ny.$

Q.4 Solve $(D^2-D'^2-3D+3D')z = xy+e^{x+2y}.$

Q.5 Solve $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = xy.$

शासकीय डॉ श्यामा प्रसाद मुखर्जी
विज्ञान एवं वाणिज्य
महाविद्यालय, कोलार रोड, भोपाल म.प्र.

मध्यप्रदेश उच्च शिक्षा गुणवत्ता उन्नयन परियोजना

अंतर्गत

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 पर आधारित प्रश्न बैंक कार्यशाला

आयोजक– परीक्षा प्रकोष्ठ

दिनांक :25/11/2022 **स्थान** : कांफ्रेंस कक्ष
समय :12:00 बजे

प्राचार्य
डॉ. सुधा बैसा

संयोजक
डॉ. कीर्ति जैन

सलाहकार समिति

डॉ. संजय तेलंग
डॉ. रागिनी तिवारी
डॉ. संगीता गुप्ता
डॉ. एम.के. गुप्ता
डॉ. सुधांशुधर द्विवेदी
डॉ. राजेश श्रीवास्तव
डॉ. प्रज्ञा रावत
डॉ. मधुसूदन प्रकाश
डॉ. माधवीलता दुबे
डॉ. सुषमा जैन
डॉ. पूनम वासनिक
डॉ. वी.पी.एस. गौर

आयोजन समिति

डॉ. मीनाक्षी सक्सेना
डॉ. इला जैन
डॉ. अनीता मंडलोई
डॉ. शिवाली शाक्य

तकनीकी समिति

डॉ. अरूणा जैन
डॉ. आशा वाधवानी
डॉ. नीतूप्रिया लचौरिया

शासकीय डॉ श्यामा प्रसाद मुखर्जी विज्ञान एवं वाणिज्य
महाविद्यालय, कोलार रोड, भोपाल म.प्र.
Tele. No. 07552551837 | Website : www.gscbhopal.in |
E-mail : hegbsccbho@mp.gov.in

महाविद्यालय

महाविद्यालय की स्थापना सन् 1982 में बेनज़ीर महल भोपाल से हुई, विज्ञान एवं वाणिज्य संकाय से प्रारंभ यह महाविद्यालय सन् 2008 में जहांगीराबाद स्थित गोखले छात्रावास में स्थानान्तरित हुआ। सत्र 2018–19 से कला संकाय एवं गृहविज्ञान संकाय में अध्यापन प्रारंभ हुआ। विभिन्न संकायों के 07 विषयों में स्नातकोत्तर कक्षायें भी संचालित हो रही है।

सन् 2020 में महाविद्यालय कोलार रोड स्थित स्वंय के भवन में स्थानान्तरित हुआ तथा वर्तमान में यह शासकीय डॉ.श्यामा प्रसाद मुखर्जी विज्ञान एवं वाणिज्य स्नातकोत्तर महाविद्यालय के नाम से जाना जाता है।

कार्यशाला

मध्यप्रदेश ऐसा पहला राज्य है जिसने शिक्षा को राष्ट्रीय स्तर पर लाने के लिये नई राष्ट्रीय शिक्षा नीति को लागू करने की पहल की है। जिसका मुख्य उद्देश्य शिक्षा का सार्वभौमिकीकरण करना है। विश्वविद्यालय अनुदान आयोग द्वारा निर्धारित पाठ्यक्रम पर आधारित प्रश्न बैंक कार्यशाला महाविद्यालय द्वारा आयोजित की जा रही है। प्रश्नों के प्रारूपों में आए बदलाव एवं छात्रहित को दृष्टिगत रखते हुये विद्यार्थियों के लिये विषय विशेषज्ञों द्वारा प्रश्न बैंक बनाया जाना प्रस्तावित है। यह प्रश्न बैंक शिक्षकों एवं विद्यार्थियों दोनों के लिये अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होगा, ऐसी उम्मीद है।